**Faculté des arts et des sciences**

**Département de mathématiques et de statistique**

**MAT 2250: Mathématiques de l'assurance-vie 1**

**Premier examen**

**15 OCTOBRE 2001, 17.00–19.30.**

---

**Répondre sur ces feuilles (recto-verso).**

**Aucune documentation permise.**

**Seule une calculatrice non-programmable est permise.**

**L'examen comporte 8 questions.**

**Une bonne réponse non justifiée n'obtient pas tous les points.**

---

**NOM** ____________________________________________

**SIGNATURE** ______________________________________

**CODE PERMANENT** _________________________________

NOM________________________________

(10 points)

1. Soit la fonction de survie d'un nouveau-né $s(x) = e^{-x^2}$, $x \geqslant 0$.
   (a) Déterminez la fonction de répartition de $T(x)$, le temps de vie future d'un individu âgé de $x$.
   (b) Évaluez $\overset{o}{\rightarrow} e_1$.

N.B. $\mathbf{P}[N(0,1) > \sqrt{2}] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} dx \cong 0.08$.

NOM________________________________

(15 points)

2. Donnez les réponses justifiées:

(a) est-ce que

$$\frac{\partial}{\partial t}\, {}_{t|n}q_x = {}_tp_x[{}_np_{x+t}\mu(x+t+n) - \mu(x+t)]?$$

(b) est-ce que

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\, {}_{t|n}q_x\right]\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}\, {}_nq_x?$$

NOM______________________________

(10 points)

3. Supposons que $q_x = 1/4$, où $x$ est un nombre entier et que $\mu_A(x+s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, est la force de mortalité pour l'hypothèse d'une force de mortalité constante et $\mu_B(x+s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, est la force de mortalité pour l'hypothèse de la distribution uniforme des décès. Quelle est la plus petite valeur de $s$ pour laquelle $\mu_B(x+s) \geqslant \mu_A(x+s)$? Une réponse numérique est requise.

NOM______________________________

(15 points)

4. Pour un individu âgé de $x$, on définit la variable aléatoire $S(x)$ telle que $T(x) = K(x) + S(x)$, où $T(x)$ est la durée de vie future et $K(x)$ est le nombre d'années complètes futures vécues.

(a) Montrez que sous l'hypothèse de la distribution uniforme des décès, $K(x)$ et $S(x)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

(b) Sous l'hypothèse d'une force de mortalité constante, explicitez une condition pour laquelle $K(x)$ et $S(x)$ sont indépendantes.

NOM________________________________

(10 points)

5. Considérez une modification de la fonction de survie de De Moivre:

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{\alpha}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \omega, \quad \alpha > 0,$$

où $\omega$ est l'âge limite. Donnez une expression explicite de $\mathbf{Var}[T(x)]$, où $T(x)$ est la durée de vie future de $(x)$.

NOM________________________________

(10 points)

6. Donnez les formules pour les variables aléatoires des valeurs actualisées $Z$ qui correspondent aux valeurs actualisées moyennes $A_x$, $A^1_{x:\overline{n}|}$, $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1}$ et

(a) démontrez que $A_x = A^1_{x:\overline{n}|} + v^n\,{}_np_x A_{x+n}$;

(b) si $A_{x:\overline{n}|} = u$, $A^1_{x:\overline{n}|} = y$ et $A_{x+n} = z$, exprimez $A_x$ en fonction de $u$, $y$ et $z$ seulement.

NOM______________________________

(15 points)

7. Soient $Z_1$ la valeur présente des bénéfices d'une assurance temporaire de $n$ années avec paiement au moment du décès émise à $(x)$, $Z_2$ la valeur présente des bénéfices d'une assurance à capital différé de $n$ années avec paiement au moment du décès émise à $(x)$, et $Z_3$ la valeur présente des bénéfices d'une assurance mixte de $n$ années avec paiement au moment du décès émise à $(x)$.

(a) En utilisant le fait que $Z_3 = Z_1 + Z_2$ (justifiez), démontrez que

$$\mathbf{Var}[Z_3] = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2.$$

(b) Donnez un exemple d'un contrat d'assurance-vie où la règle des moments n'est pas satisfaite.

NOM______________________________

(15 points)

8. Soient $Z_1$ la valeur présente des bénéfices d'une assurance mixte de $n$ années avec paiement au moment du décès, émise à $(x)$ et $Z_2$ la valeur présente des bénéfices d'une assurance mixte de $n$ années avec paiements à la fin de l'année du décès émise à $(x)$. Avec une force d'interêt constante $\delta$ et une force de mortalité constante $\mu$ calculez

(a) l'espérance de $Z_1$;
(b) l'espérance de $Z_2$.