Faculté des arts et des sciences

Département de mathématiques et de statistique

MAT 2250: Mathématiques de l'assurance-vie 1

Examen final

17 DÉCEMBRE 2001, 17.00–20.00.

Répondre sur ces feuilles (recto-verso).

Aucune documentation permise.

Seule une calculatrice non-programmable est permise.

L'examen comporte 10 questions.

Une bonne réponse non justifiée n'obtient pas tous les points.

NOM ______________________________

SIGNATURE ______________________________

CODE PERMANENT ______________________________

NOM______________________________

(10 points)

1. Dans une table de mortalité ¡A¿, la force de mortalité à l'âge x est notée $\mu_x^{«A»}$ et la force d'intérêt est constante et notée $\delta^{«A»}$. Dans une table de mortalité ¡B¿, la force de mortalité à l'âge x est notée $\mu_x^{«B»}$ et la force d'intérêt est constante et notée $\delta^{«B»}$. En supposant que $3\delta^{«A»} = \delta^{«B»}$ et que $\bar{a}_x^{«A»} = \bar{a}_x^{«B»}$ pour tout $x \leqslant \omega$, exprimez $\mu_x^{«B»}$ en fonction de $\mu_x^{«A»}$. Justifiez chaque pas.

NOM______________________________

(10 points)

2. On suppose une force de mortalité constante μ et une force d'intérêt constante δ.

(a) Calculez $\bar{a}_x$;

(b) Quelle est la probabilité que $\bar{a}_{\overline{T|}}$ excède $\bar{a}_x$?

Exprimez vos réponses en fonction de μ et δ.

NOM________________________________

(10 points)

3. Montrez que

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{s}_{x\overline{n}|} = \bar{s}_{x\overline{n}|}\,\mu(x+n) - \frac{\bar{A}^{1}_{x\overline{n}|}}{{}_{n}E_x}$$

où $\bar{s}_{x\overline{n}|} = \dfrac{\bar{a}_{x\overline{n}|}}{{}_{n}E_x}$.

NOM________________________________

(10 points)

4. La relation suivante est correcte:
$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} A_x^{(m)}.$$

(a) Sous l'hypothèse de loi uniforme des décès montrez que la relation ci-haut peut s'écrire
$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m),$$
où $\alpha(m) = \dfrac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$ et $\beta(m) = \dfrac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$.

(b) Sous l'hypothèse de loi uniforme des décès et pour $i = 0{,}10$, $\ddot{a}_x = 8$, $\ddot{a}_{x+n} = 6$, ${}_np_x = 0{,}95$, $v^n = 0{,}3$, calculez numériquement $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(12)}$.

NOM________________________________

(10 points)

5. Soit la force de mortalité d'un nouveau né est $\mu(x) = \dfrac{1}{100 - x}$, $0 \leqslant x < 100$. Si cette force de mortalité est doublée, quelle est la diminution dans l'éspérance de vie $\overset{o}{\rightarrow} e_{25}$, c'est à dire $\overset{o}{\rightarrow} e_x$ pour un individu (x) où $x = 25$?

NOM______________________________

(10 points)

6. (Suite de numéro 5.) Un individu âgé de 25 ans achète une assurance temporaire d'une durée de 40 ans avec bénéfice au décès de 100 000. On applique une force d'intérêt constante $\delta = 0{,}05$.

(a) Si les primes sont payable de façon continue pendant toute la durée du contract, calculez numériquement la prime annuelle sous la force de mortalité $\mu(x) = \dfrac{1}{100 - x}$, $0 \leqslant x < 100$, telle que spécifiée en no. 5.

(b) Si la force de mortalité $\mu(x)$ est doublée, calculez numériquement la variation dans la prime annuelle par rapport à celle calculée en (a).

NOM______________________________

(10 points)

7. Une annuité garantie de n années est définie de la façon suivante: les versements sont faits pendant les n premières années quoiqu'il advienne, et par la suite seulement si l'assuré survit. La valeur présente des bénéfices est donnée par

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|}, & T < n, \\ \bar{a}_{\overline{n}|} + v^n \, \bar{a}_{\overline{T-n}|}, & T \geqslant n. \end{cases}$$

(a) Montrez que $\mathbf{E}[Z] = \bar{a}_{\overline{x\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x$;

(b) Montrez que $\mathrm{V}\mathbf{ar}[Z] = \frac{2}{\delta}\, v^{2n}\, {}_n p_x (\bar{a}_{x+n} - {}^2\bar{a}_{x+n}) - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2$.

Indice: Présenter Z comme la somme de $Y_1 = \bar{a}_{\overline{n}|}$ et de $Y_2 = \begin{cases} 0, & T < n, \\ v^n \, \bar{a}_{\overline{T-n}|}, & T \geqslant n. \end{cases}$

NOM________________________________

(10 points)

8. Donnez la formule prospective et rétrospective de la réserve ${}_kV_x$ selon la notation actuarielle vue au cours. Ensuite, montrez que

$$ {}_{k+1}V_x - {}_kV_x = \frac{A_{x+k+1} - A_{x+k}}{1 - A_x}. $$

NOM______________________________

(10 points)

9. Une assurance temporaire de n années émise à un individu (x) verse un bénéfice $b_k = \ddot{a}_{\overline{n-k}|}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, à la fin de l'année k du décès. Soit π la prime annuelle payable en début d'année pendant les n années du contract.

(a) Donnez explicitement la fonction de perte prospective de la k-ème année $({}_kL)$ associée à ce contract d'assurence.

(b) Est it correct (justifiez votre réponce) que sous l'hypothèse "aggregate" la réserve ${}_kV = \mathbf{E}[{}_kL] = \mathbf{E}[L \mid k \leqslant K(x) < n]$ de la k-ème année est donnée par la formule

$$ {}_kV = \ddot{a}_{\overline{n-k}|} - \ddot{a}_{x+k\overline{n-k}|} - \pi\ddot{a}_{x+k\overline{n-k}|}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1? $$

(c) Calculez π selon le principe d'équivalence.

NOM________________________________

(10 points)

10. Soit la réserve actuarielle $\overset{20}{\rightarrow}{}_{t}V(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$ au temps t.
   (a) Donnez explicitement les formules permettant de calculer cette réserve selon l'approche prospective pour toute valeur de t, $0 \leqslant t \leqslant 35$.
   (b) Calculez $\overset{20}{\rightarrow}{}_{10}V(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$ au taux d'interêt $i = 6\%$ et en utilisant la table ci-dessous.

x	30	40	50	65
l_x	95	93	90	75
A_x	0,10	0,16	0,25	0,44

Supposez l'hypothèse de loi uniforme des décès.