

Faculté des arts et des sciences
Département de mathématiques et de statistique
MAT 3251: Théorie du risque

Examen final différé

Répondre sur ces feuilles (recto-verso).

Aucune documentation permise.

Seule une calculatrice non-programmable est permise.

L'examen comporte 9 questions.

Une bonne réponse non justifiée n'obtient pas tous les points.

NOM _____

SIGNATURE _____

CODE PERMANENT _____

(10 points)

1. Dans un modèle de risque discret (l'assurance est avec une franchise), les réclamations annuelles sont i.i.d. et possèdent la loi de probabilité

$$\mathbf{P}(X_k = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{3}{8}, \quad \mathbf{P}(X_k = 3) = \frac{1}{8}.$$

Les primes reçues annuellement sont $c = 0,95$. Le surplus initial $U_0 = u$ est un entier positif. Calculez:

- (a) le coefficient d'ajustement R ;
- (b) la probabilité de ruine $\psi(u)$.

NOM _____

(15 points)

2. Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de nombre de réclamations

$$N_t = \max\{n > 0 : \sum_{i=1}^n T_i \leq t\},$$

et soient T_1, T_2, \dots les intervalles entre les réclamations (T_1 est l'intervalle entre zero et la première réclamation). Supposant que les v.a. T_1, T_2, \dots sont indépendantes, T_1 est Uniform $(0, 1)$ et T_2, T_3, \dots sont exponentiels avec le paratètre $\lambda > 0$, déterminez $\mathbf{P}\{N_t = 1\}$.

Indice: Exprimez $\mathbf{P}\{N_t = 1\}$ en termes de T_1 et T_2 .

(15 points)

3. (Continuation du no. 2) Pour le processus de nombre de réclamations du no. 2 déterminez

$$\mathbf{P}\{T_1 \leq u \mid N_t = 1\}.$$

NOM _____

(10 points)

4. Considérez le modèle de risque suivant

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t > 0,$$

où S_t est une variable aléatoire Poisson composé avec un paramètre $\lambda = 2$, $f(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$ pour $x > 0$ et $c = 6(1 + \theta)$ où $\theta > 0$ est le chargement de sécurité.

- (a) Trouvez le coefficient d'ajustement en termes de θ ;
- (b) Trouvez une expression pour la probabilité de ruine $\psi(u)$ en termes de θ .

(10 points)

5. Soit S une variable aléatoire avec loi Poisson composée de paramètre $\lambda = 2$ et $p(1) = \frac{1}{5}$ et $p(2) = \frac{4}{5}$. Trouvez numériquement la fonction de probabilité de S et la fonction de répartition de S pour $x = 0, 1, 2$ et faites le même pour $\mathbf{E}[I_x]$ ($I_x = (S - x)^+$) pour $x = 0, 1, 2, 3$.

NOM _____

(10 points)

6. Soient $N, L_1, L_2 \dots$ des variables aléatoires indépendantes et telles que (a) L_1, L_2, \dots ont la même loi

$$f_L(x) = (1 - F_X(x))/\mathbf{E}[X]$$

pour une certaine loi de probabilité F_X , et (b) la loi de probabilité de N est Poisson avec un paramètre $\lambda > 0$. Considérez la somme $S_N = \sum_{i=1}^N L_i$ qui est définie à zero comme $S_0 = 0$. Calculez explicitement la fonction génératrice des moments de S_N en termes de la fonction génératrice des moments M_X de la variable aléatoire X .

(10 points)

7. Considérez le modèle de risque suivant

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t > 0,$$

où S_t est une variable aléatoire Poisson composé avec un paramètre λ et loi $F(x)$; $c = (1+\theta)\mathbf{E}[S_t]$. Pour la probabilité de ruine ultime $\psi(u)$ montrez en détail (chaque pas doit être justifié) que

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-y)[1-F(y)]dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1-F(y)]dy.$$

Montrez aussi que $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

NOM _____

(10 points)

8. Soient X et Y les variables aléatoires indépendantes de loi Gamma

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

avec paramètres $\alpha = 3, \lambda = 2$ et $\alpha = 2, \lambda = 2$. À quelle famille de lois appartient la loi de la somme $X + Y$?

(10 points)

9. Considérez le modèle de risque suivant

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t > 0,$$

où S_t est une variable aléatoire Poisson composé avec un paramètre λ et fonction de densité $f(x) = \frac{1}{5}e^{-0,2x}$ pour $x > 0$. Le chargement de sécurité est 35%. Un contrat de réassurance proportionnelle est disponible à un coût de $1,5\mathbf{E}(h(X))$, où la proportion des réclamations retenue par l'assureur direct est de 32%, c'est à dire $h(X) = 0,32X$.

- (a) Calculez le coefficient d'ajustement pour ce contrat;
- (b) Calculez le coefficient d'ajustement si la proportion retenue est de 43%.