Faculté des arts et des sciences

Département de mathématiques et de statistique

MAT 3251: Théorie du risque

Premier examen

22 OCTOBRE 2001, 13.30–15.30.

Répondre sur ces feuilles (recto-verso).

Aucune documentation permise.

Seule une calculatrice non-programmable est permise.

L'examen comporte 10 questions.

Une bonne réponse non justifiée n'obtient pas tous les points.

NOM ______________________________

SIGNATURE ______________________________

CODE PERMANENT ______________________________

NOM________________________________

(10 points)

1. Supposons que les v.a N et X sont indépendantes et, de plus, N possède une loi Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et X est de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$; $Z = N + X$. Trouvez:
   (a) la fonction de répartition $\mathbf{P}(Z \leqslant x)$ et, en particulier, $\mathbf{P}(Z \leqslant 3/2)$ et $\mathbf{P}(Z \leqslant 7/4)$;
   (b) la fonction génératrice des moments de Z;
   (c) l'espérance et la variance de Z.

NOM________________________________

(10 points)

2. Etant donné que N est de loi Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ si $\Lambda = \lambda$, et que la variable aléatoire Λ est de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, trouvez:

(a) la fonction génératrice des moments de N;
(b) $\mathbf{P}(N = 0)$;
(c) $\mathbf{Var}(N)$.

NOM______________________________

(10 points)

3. Soient $N, X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1, \ldots, X_N$ ont la même loi. Considérez la somme $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ qui est définie à zéro comme $S_0 = 0$.

(a) Trouvez des expressions pour $\mathbf{E}(S_N)$ et $\mathbf{Var}(S_N)$ en terme de $\mathbf{E}(N)$, $\mathbf{Var}(N)$, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.

(b) Calculez numériquement les valeurs de $\mathbf{E}(S_N)$ et $\mathbf{Var}(S_N)$ si N est de loi binomiale négative avec paramètres $n = 5$, $p = 0.2$ et X_i a une loi de probabilité discrète p_X donnée par $p_X(1) = 0.1$, $p_X(2) = 0.5$ et $p_X(3) = 0.4$.

NOM________________________________

(10 points)

4. Soient X et Y les variables aléatoires indépendantes telles que X est de loi exponentielle avec paramètre $\lambda = 2$, et Y est de loi Gamma avec paramètres $\alpha = 3$, $\lambda = 2$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0,$$

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0.$$

Trouvez la fonction de répartition de $X + Y$ en utilisant la formule de convolution. À quelle famille de lois appartient la loi de la somme $X + Y$?

NOM_______________________________

(10 points)

5. Soient $N, X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1, \ldots, X_N$ ont la même loi. De plus on sait que les lois de probabilité de N et X_i sont données respectivement par

$$P(N = n) = \frac{1}{-\ln(1-q)} \frac{q^n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad q \in (0, 1),$$
$$P(X_i = 0) = 0.2 \quad \text{et} \quad P(X_i = 1) = 0.8.$$

Considérez la somme $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ qui est définie à zero comme $S_0 = 0$. Calculez explicitement (en termes de q et t) la fonction génératrice des moments de S_N. (Rappelez-vous que $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n) = \ln(1/(1-x)), \quad -1 \leqslant x < 1.$)

NOM________________________________

(10 points)

6. Soient S_1 et S_2 deux variables aléatoires indépendantes. De plus, elles sont Poisson composées avec des paramètres $\lambda_1 = 3$, $p_1(1) = 0.2$, $p_1(2) = 0.8$ et $\lambda_2 = 7$, $p_2(2) = 0.5$, $p_2(3) = 0.5$ respectivement. Identifiez la loi de $S_1 + S_2$.

NOM______________________________

(10 points)

7. Soient N_1, N_2 et N_3 des variables aléatoires indépendantes Poisson avec une espérance de $\mathbf{E}(N_i) = 2i$ pour $i = 1, 2, 3$. Trouvez la loi de $S = -2N_1 + 5N_2 + N_3$.

NOM________________________________

(10 points)

8. Soit S une variable aléatoire Poisson composée avec paramètres $\lambda = 1$, $p(1) = 1/3$, $p(2) = 1/3$, $p(3) = 1/3$. Calculez $P(S = 0)$, $P(S = 1)$, $P(S = 2)$, $P(S = 3)$.

NOM______________________________

(10 points)

9. Soit S une variable aléatoire binomiale négative composée avec les paramètres $r = 5$, $p = 0.5$, $p(1) = 0.6$, $p(2) = 0.4$. Calculez $P(S = 0)$, $P(S = 1)$, $P(S = 2)$, $P(S = 3)$ en utilisant la formule de récursion qui en forme générale est

$$f_S(x) = \sum_{i=1}^{x} \left[a + \frac{bi}{x}\right] p(i) f_S(x-i), \quad x = 1, 2, \ldots,$$

ou a et b sont définies par la formule $\mathbf{P}(N = n)/\mathbf{P}(N = n-1) = a + (b/n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

NOM________________________________

(10 points)

10. Soit S une variable aléatoire Poisson composée avec paramètres $\lambda = 10$, $p(x) = 0.2e^{-0.2x}$, $x > 0$. Trouvez la valeur de θ (chargement de securité) tel que

$$\mathbf{P}[S > (1+\theta)\mathbf{E}(S)] = 0.05,$$

en utilisant l'approximation normale. Vous pouvez vous servir de cette table pour les valeurs de la loi normale $N_{(0,1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$:

z	1.282	1.645	2.364
$N_{(0,1)}(z)$	0.90	0.95	0.99