Faculté des arts et des sciences

Département de mathématiques et de statistique

MAT 3251: Théorie du risque

Examen final

17 DÉCEMBRE 2001, 12.30–15.30.

Répondre sur ces feuilles (recto-verso).

Aucune documentation permise.

Seule une calculatrice non-programmable est permise.

L'examen comporte 8 questions.

Une bonne réponse non justifiée n'obtient pas tous les points.

NOM ______________________________

SIGNATURE ______________________________

CODE PERMANENT ______________________________

NOM________________________________

(10 points)

1. Dans un modèle de risque discret, les réclamations annuelles sont i.i.d. et possèdent la loi de probabilité

$$\mathbf{P}(V_k = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(V_k = 1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(V_k = 2) = \frac{1}{4}.$$

Les primes reçues annuellement sont $c = 1$. Le surplus initial $U_0 = u$ est un entier positif.

Calculez:

(a) le coefficient d'ajustement R;
(b) la probabilité de ruine $\psi(u)$.

NOM________________________________

(20 points)

2. Soit $\{N_t, t \geqslant 0\}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et soient $T_1, T_2, \ldots$ les intervales entre les réclamations. Déterminez la loi conditionnelle de T_1, étant donné que $N_t = 1$:

$$\mathbf{P}\{T_1 \leqslant u \mid N_t = 1\}.$$

NOM______________________________

(10 points)

3. Considérez le modèle de risque suivant

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t > 0,$$

où S_t est une variable aléatoire Poisson composeé avec un paramètre $\lambda = 2$, $f(x) = e^{-x}$ pour $x > 0$ et un chargement de sécurité est $\theta = c/2 - 1$.

(a) Trouvez le coefficient d'ajustement en termes du chargement de sécurité θ;

(b) Trouvez une expression pour la probabilité de ruine $\psi(u)$.

NOM______________________________

(10 points)

4. Considérez le modèle de risque suivant

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t > 0,$$

où S_t est une variable aléatoire Poisson composeé avec un paramètre $\lambda = 2$, $f(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}$ pour $x > 0$. La probabilité de ruine pour ce modèle est donnée par

$$\psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}, \quad u > 0.$$

Trouvez la valeur de la prime c payée dans ce modèle.

NOM______________________________

(15 points)

5. Soit S une variable aléatoire avec loi Poisson composée de paramètre $\lambda = 1$ et $p(1) = \frac{5}{6}$ et $p(2) = \frac{1}{6}$. Trouvez numériquement la fonction de probabilité de S et la fonction de répartition de S pour $x = 0, 1, 2$ et faites le même pour $\mathbf{E}[I_x]$ ($I_x = (S - x)^+$) pour $x = 0, 1, 2, 3$.

NOM______________________________

(10 points)

6. Soient $N, L_1, L_2 \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et telles que (a) $L_1, L_2, \ldots$ ont la même loi

$$f_L(x) = (1 - F_X(x))/\mathbf{E}[X]$$

pour une certaine loi de probabilité F_X, et (b) la loi de probabilité de N est donnée par

$$\mathbf{P}(N = n) = \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Considérez la somme $S_N = \sum_{i=1}^N L_i$ qui est définie à zero comme $S_0 = 0$. Calculez explicitement la fonction génératrice des moments de S_N en termes de la fonction génératrice des moments M_X de la variable aléatoire X.

NOM______________________________

(15 points)

7. Considérez le modèle de risque suivant

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t > 0,$$

où S_t est une variable aléatoire Poisson composeé avec un paramètre λ et loi $F(x)$; $c = (1+\theta)\mathbf{E}[S_t]$. Pour la probabilité de ruine ultime $\psi(u)$ montrez en détail (chaque pas doit être justifié) que

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-y)[1-F(y)]dy + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty [1-F(y)]dy.$$

Montrez aussi que $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$.

NOM______________________________

(10 points)

8. Considérez le modèle de risque suivant

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t > 0,$$

où S_t est une variable aléatoire Poisson composeé avec un paramètre λ et fonction de densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-0,5x}$ pour $x > 0$. Le chargement de sécurité est 30%. Un contract de réassurance proportionnelle est disponible à un coût de $1,5\mathbf{E}(h(X))$, où la proportion des réclamations retenue par l'assureur direct est de 27%, c'est à dire $h(X) = 0,27X$.

(a) Calculez le coefficient d'ajustement pour ce contract;
(b) Calculez le coefficient d'ajustement si la proportion retenue est de 45%.