

Проекция и симуляция таблиц смертности

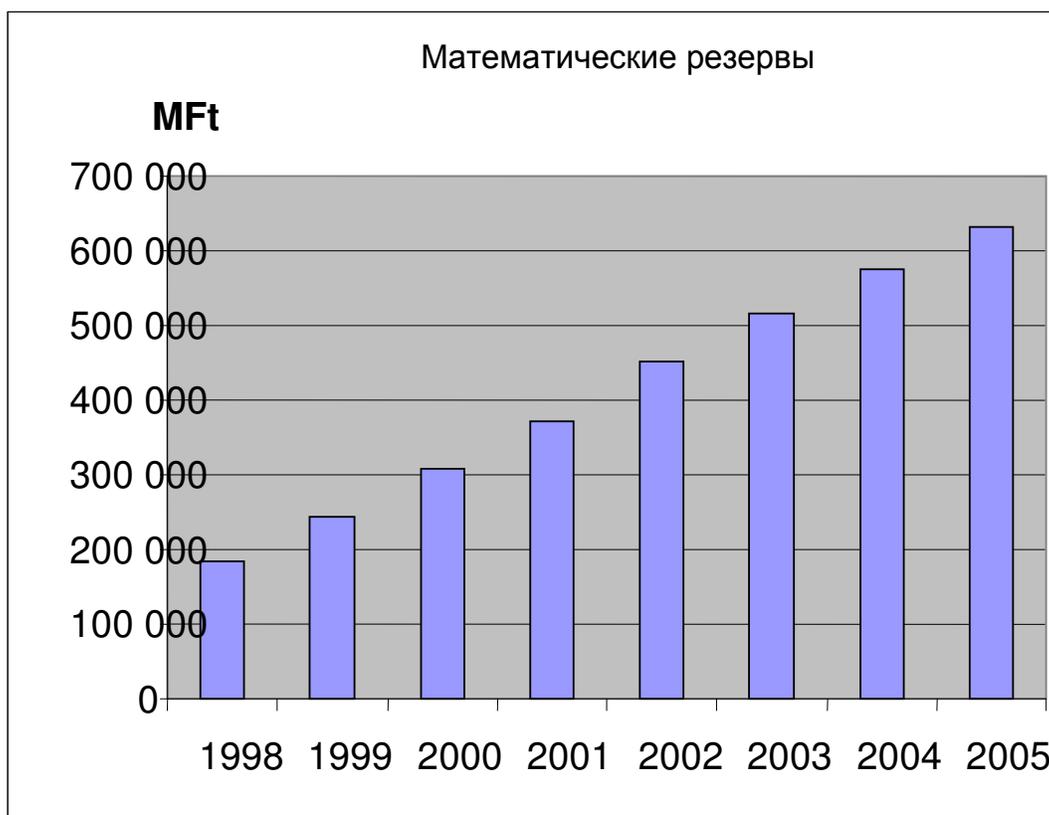
Miklós Arató
Eötvös Loránd University
(Budapest)

Несколько данных о страховом бизнесе в Венгрии

07.12.2006

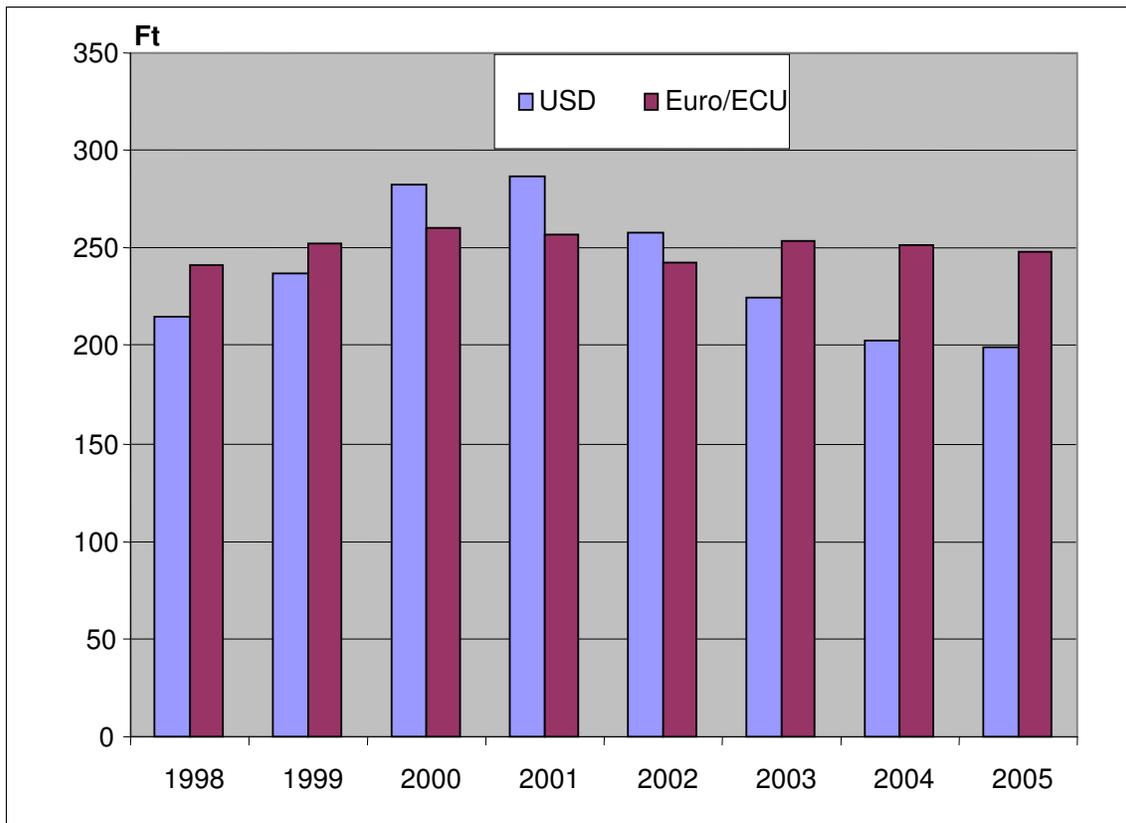
2

Математические резервы



07.12.2006

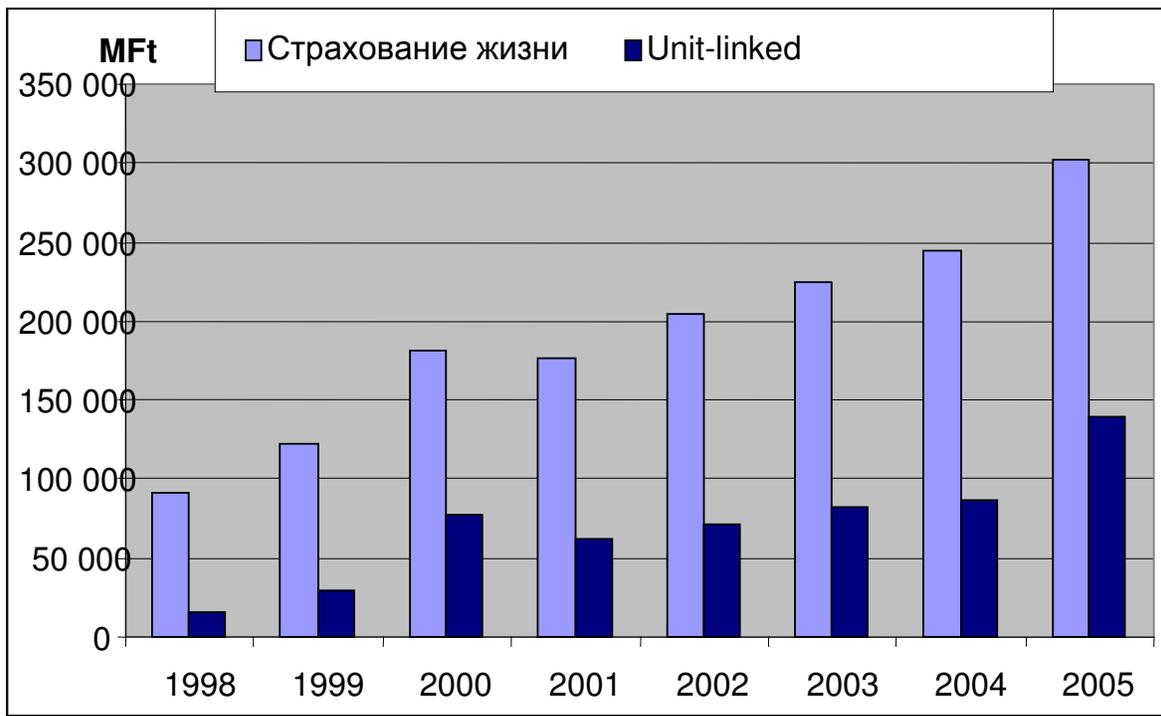
3



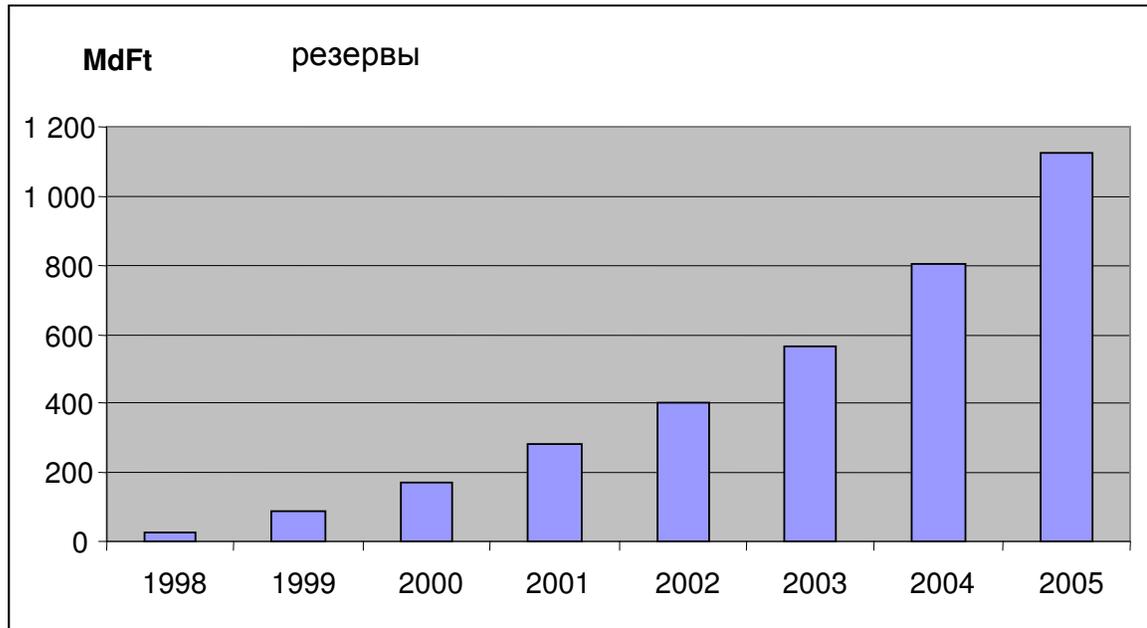
07.12.2006

4

Премии



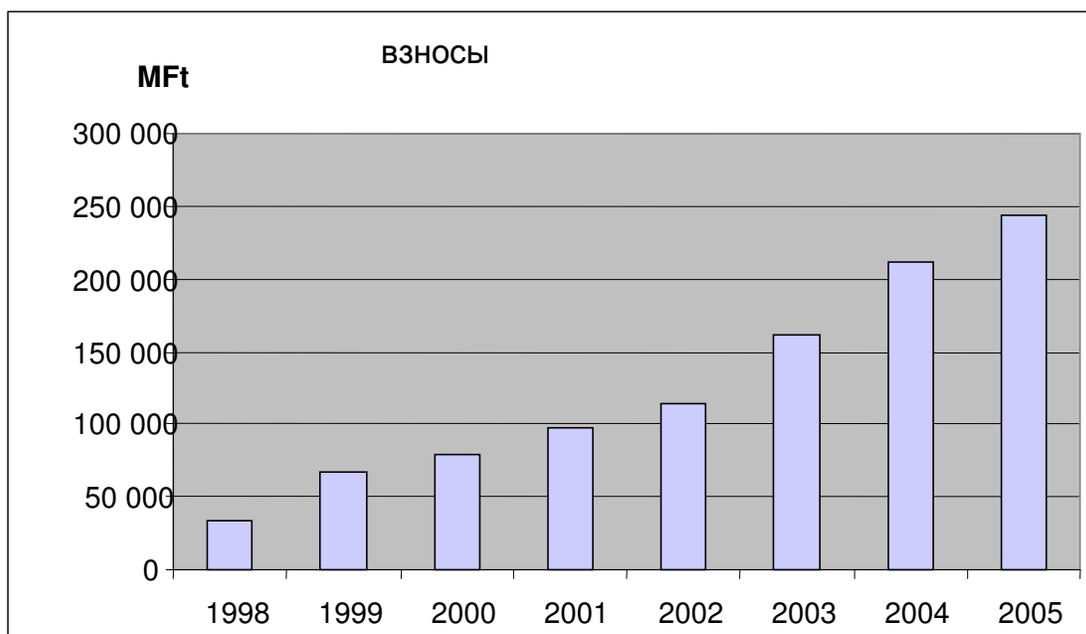
Пенсионные фонды



07.12.2006

6

Пенсионные фонды



07.12.2006

7

О таблицах смертности

07.12.2006

8

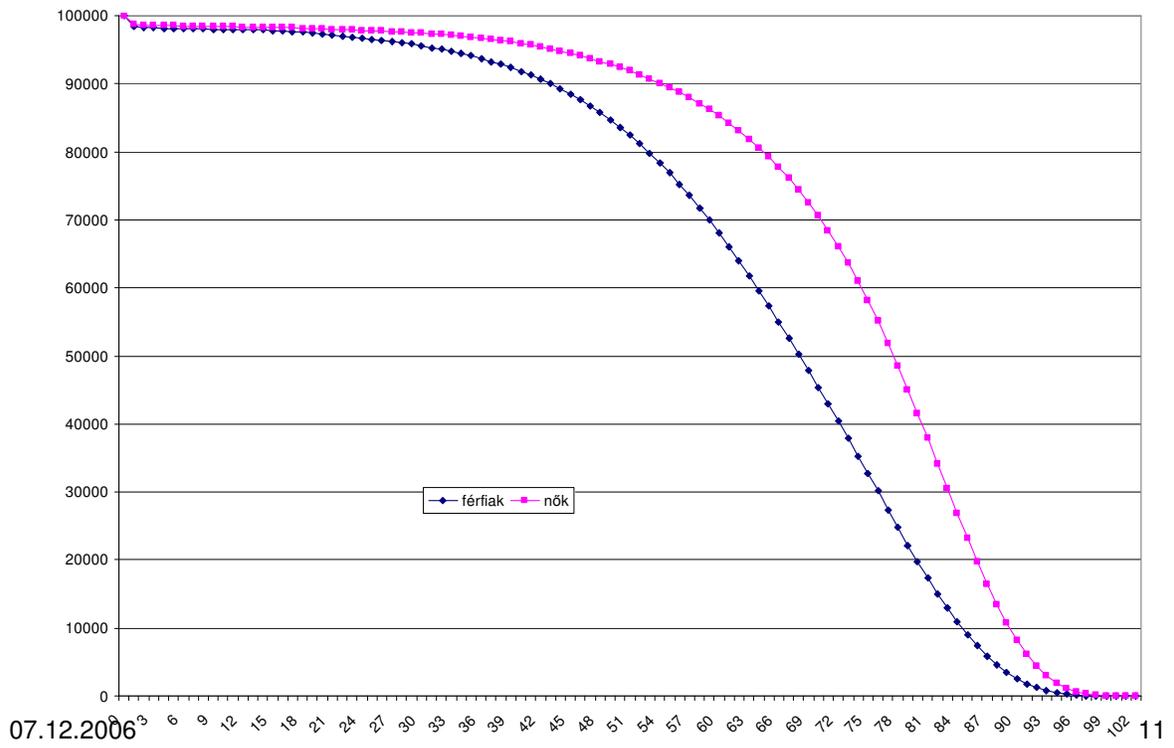
Таблицы смертности

| x | lx | dx | qx |
|------------|--------|------|----------|
| 0 | 100000 | 1647 | 0,01647 |
| 1 | 98353 | 73 | 0,000742 |
| 2 | 98280 | 50 | 0,000509 |
| 3 | 98230 | 59 | 0,000601 |
| 4 | 98171 | 34 | 0,000346 |
| 5 | 98137 | 28 | 0,000285 |
| 6 | 98109 | 29 | 0,000296 |
| 7 | 98080 | 32 | 0,000326 |
| 8 | 98048 | 33 | 0,000337 |
| 9 | 98015 | 31 | 0,000316 |
| 10 | 97984 | 27 | 0,000276 |
| 11 | 97957 | 24 | 0,000245 |
| 12 | 97933 | 23 | 0,000235 |
| 13 | 97910 | 30 | 0,000306 |
| 14 | 97880 | 54 | 0,000552 |
| 15 | 97826 | 67 | 0,000685 |
| 16 | 97759 | 81 | 0,000829 |
| 17 | 97678 | 98 | 0,001003 |
| 07.12.2006 | 97580 | 115 | 0,001179 |

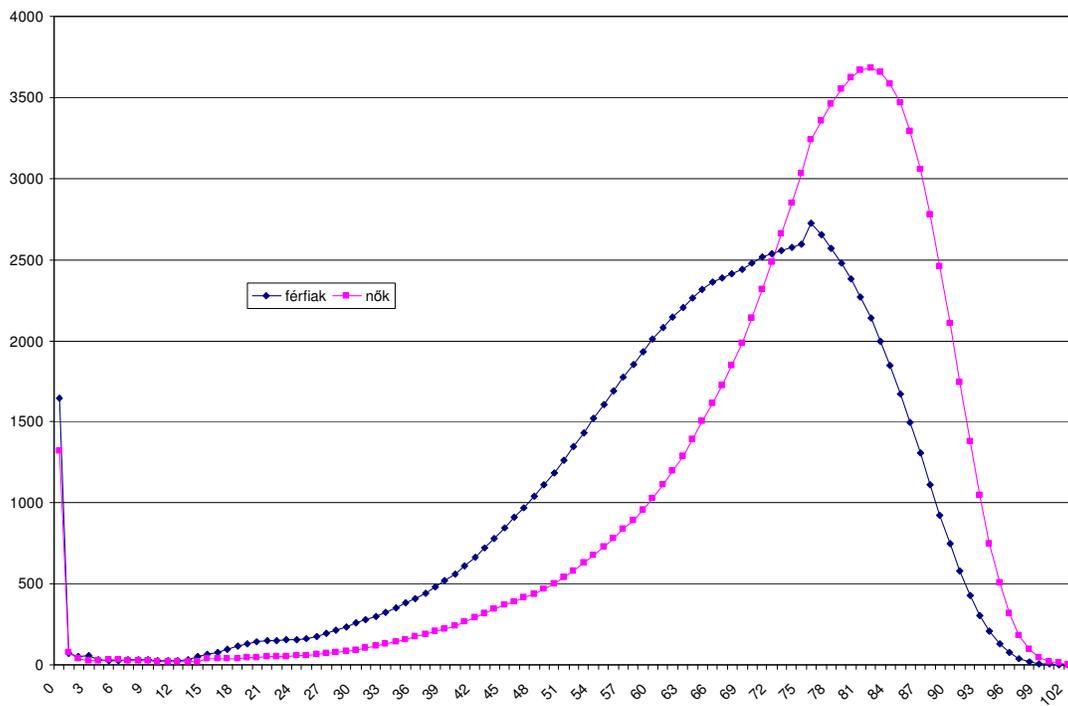
Обозначения

- l_x : число доживших до возраста x
- d_x : число людей доживших до возраста x и умерших до $(x+1)$
- $q_x: d_x/l_x$
- e_x : средняя продолжительность предстоящей жизни в возрасте x

I_x



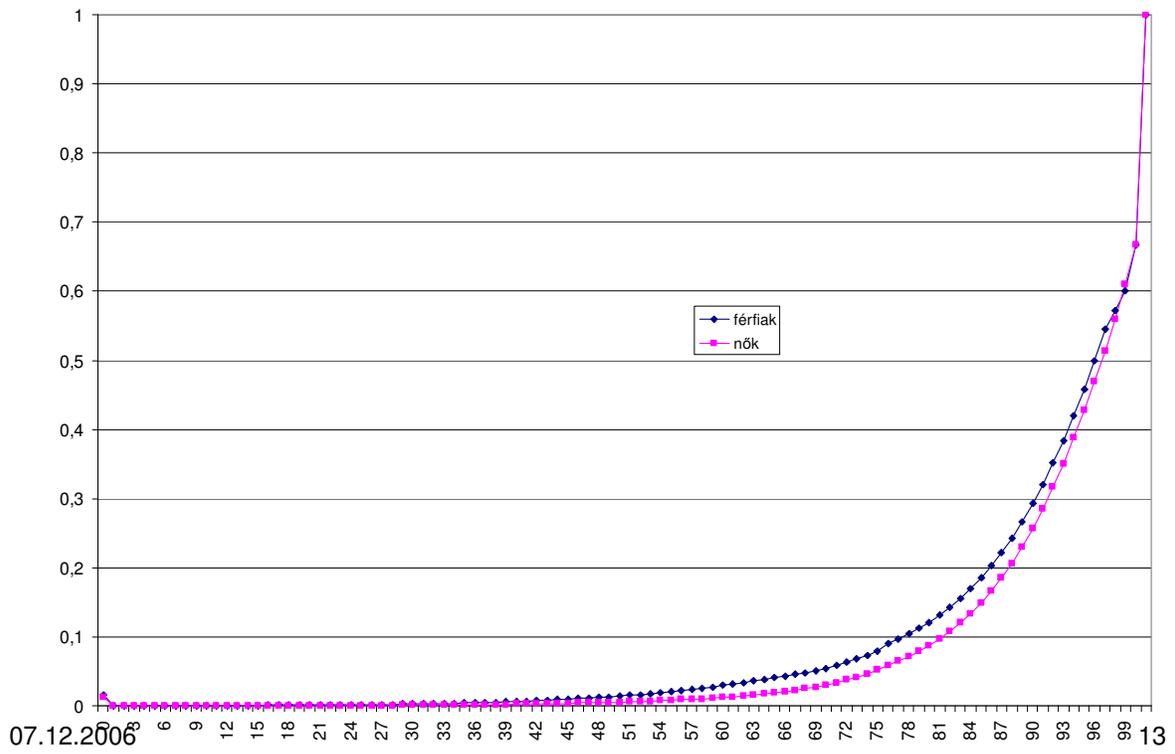
d_x



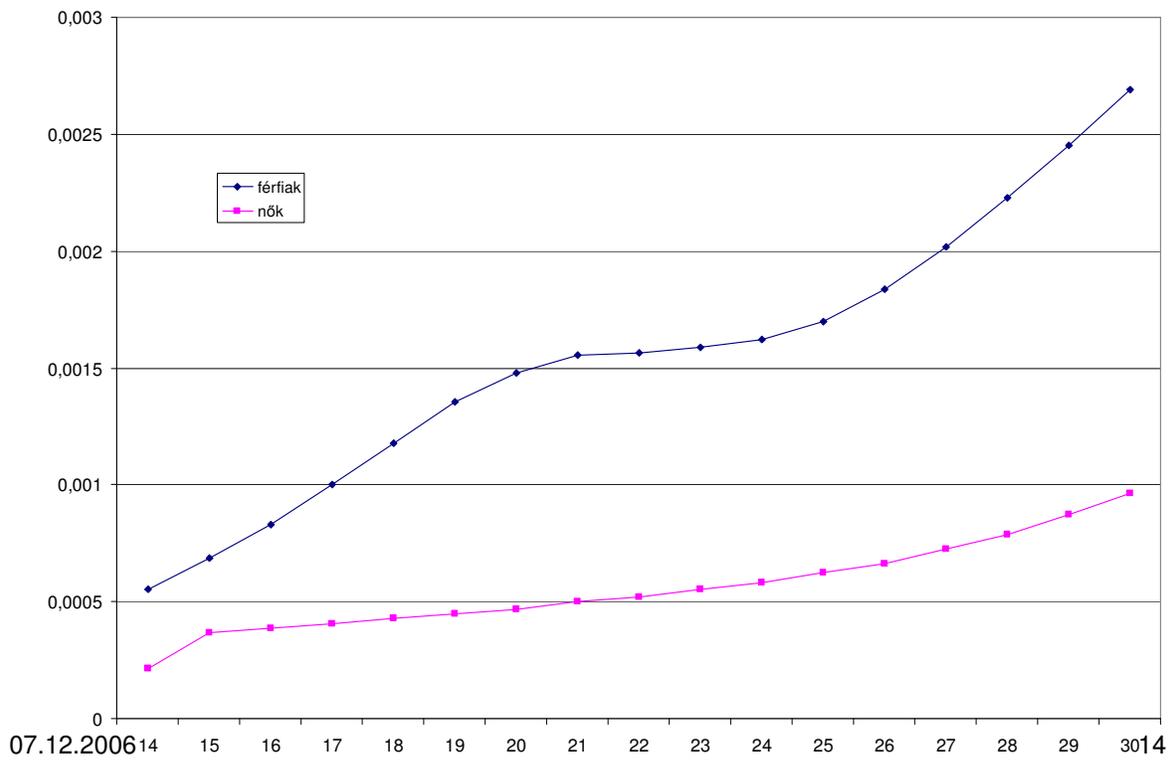
07.12.2006

12

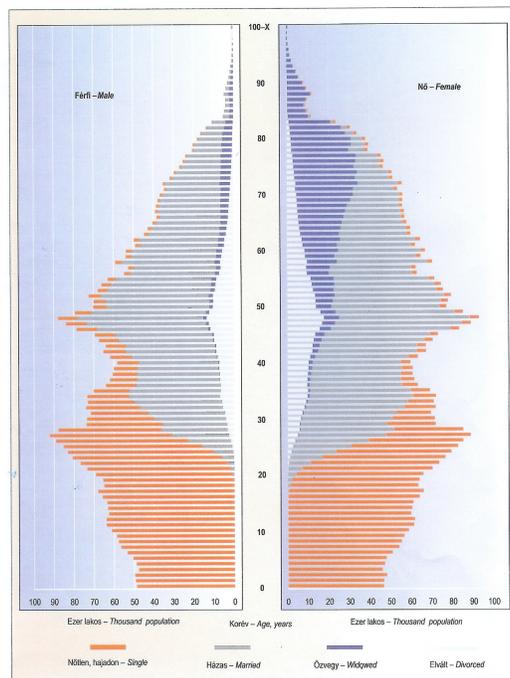
q_x



$q_x (x=14, \dots, 30)$



G.1. A NÉPESSÉG SZÁMA NEM, ÉLETKOR ÉS CSALÁDI ÁLLAPOT SZERINT, 2003. január 1.
POPULATION NUMBER BY SEX, AGE AND MARITAL STATUS, 1 January 2003



07.12.2006

15

Конструкция таблиц смертности (история)

- Первая таблица: Halley
- Moivre: попытка конструкции функции распределения продолжительности жизни
- Halley: данные только о распределении умерших по возрастам
- Quetelet: +данные о рождениях

Конструкция таблиц смертности (история) II.

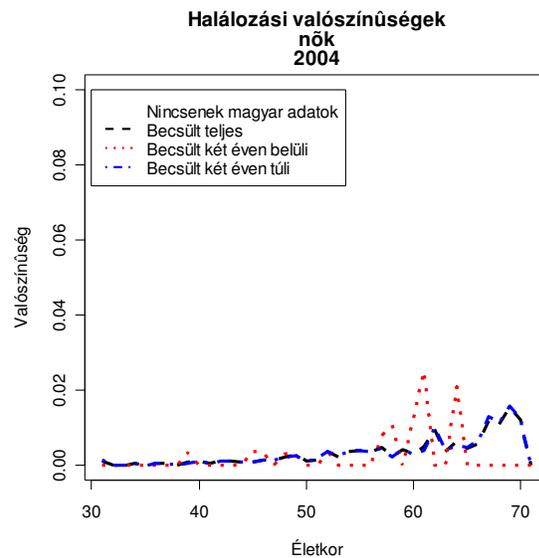
- Сопоставление данных переписи населения с регистрами умерших
- de Parcieux (1746): таблицы смертности, составленные по индивидуальным наблюдениям (участники тонтин)
- Конец 19 века: таблицы смертности застрахованных (Англия, Америка, Германия)

Конструкция таблиц смертности (данные)

- Дата первого дня страхования
- Дата выбытия
- Причина выбытия
- 100 лет тому назад это уже знали
(Савич 113. стр.)
- Как можно больше других данных

Оценка q_x

- 365.25^* (число смертей в возрасте x) /
(продолжительность наблюдения в днях для застрахованных возраста x)
- Что значит возраст x ?
- Пример оценки для одной венгерской страховой компании:



07.12.2006

19

Оценка q_x (продолжение)

- q =вероятность смерти в один день для возраста x
- Наблюдения: (X_i, t_i) , где $X_i=1$, если i . наблюдаемый умер в возрасте x , $X_i=0$, если i . наблюдаемый выбыл или перешел в возраст $(x+1)$. t_i : число дней проведенных i . наблюдаемый в возрасте x .
- *Loglikelihood* ($S = \sum X_i, T = \sum t_i$):

$$\ell(q) = \sum_{(c)} t_i \log(1-q) + \sum_{(h)} (\log q + (t_i - 1) \log(1-q)) = S \cdot \log \frac{q}{1-q} + T \cdot \log(1-q)$$

07.12.2006

Определение оценки максимального правдоподобия и доверительные интервалы

$$\ell'(q) = S \cdot \frac{1}{q(1-q)} - T \cdot \frac{1}{1-q} = 0 \qquad \hat{q} = \frac{S}{T} = \frac{\sum X_i}{\sum t_i}$$

$$\hat{q} \pm \kappa_\alpha \sqrt{\frac{\hat{q}(1-\hat{q})}{T}} \qquad \kappa_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$$

$$\{q : \ell(q) \geq \ell(\hat{q}) - \kappa_\alpha^2/2\} = \{q_0 \leq q \leq q_1\}$$

$$q_0, q_1 : \left(\frac{q}{\hat{q}}\right)^S \left(\frac{1-q}{1-\hat{q}}\right)^{T-S} = \exp(-\kappa_\alpha^2/2), S \neq 0,$$

$$q_0 = 0, q_1 = 1 - \exp(-\kappa_\alpha^2/2T), S = 0$$

07.12.2006

21

Определение годичной вероятности смерти

$$1 - (1 - q)^{365}$$

$$1 - (1 - q)^{366}$$

$$365.25q$$

Сглаживание

- $q_{0,x}$: начальная оценка
- Whittaker-Henderson:

$$\sum_{j=0}^n w_j (q_j - q_{0,j})^2 + h \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta^l q_j)^2 \rightarrow \min$$

$$\Delta q_x = q_{x+1} - q_x$$

Сглаживание (сплайны)

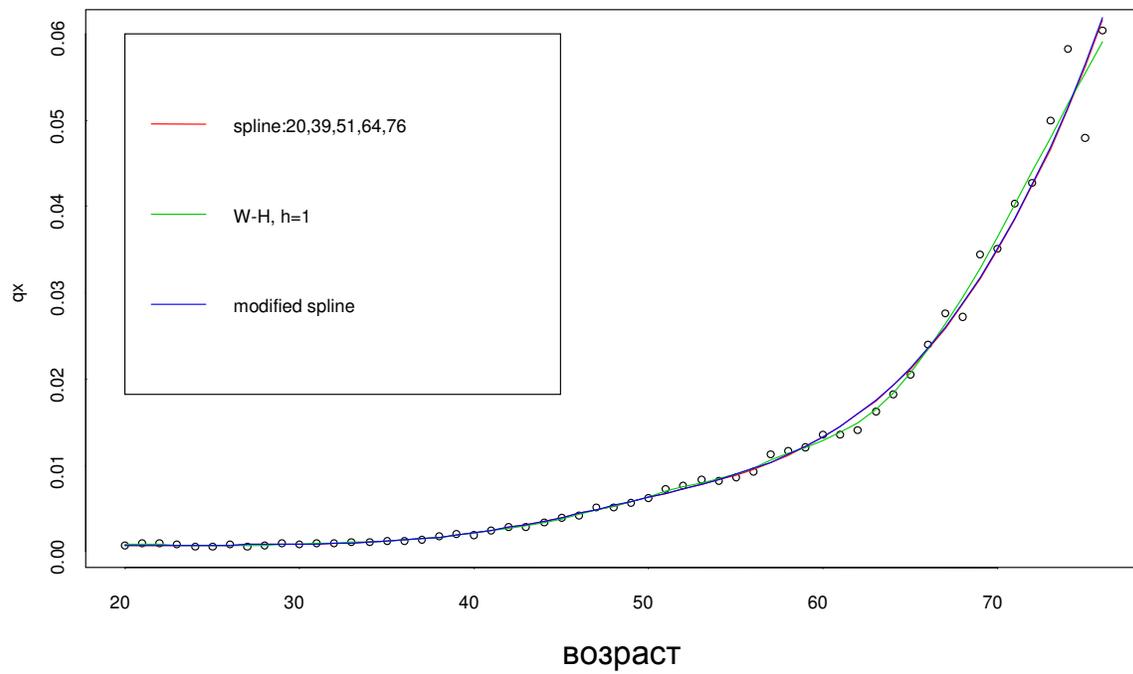
$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0, & x < x_j \\ (x - x_j)^3, & x \geq x_j \end{cases}$$

$$\Phi_j(x) = \varphi_j(x) - \frac{x_n - x_j}{x_n - x_{n-1}} \varphi_{n-1}(x) + \frac{x_{n-1} - x_j}{x_n - x_{n-1}} \varphi_n(x)$$

$$q_x = a_0 + a_1 x + \sum_{j=1}^{n-2} b_j \Phi_j(x),$$

$$q_{x_j} = q_{0,x_j}, \quad q'_{x_j+} = q'_{x_j-}, \quad q''_{x_j+} = q''_{x_j-}$$

Сравнение сглаживаний



07.12.2006

25

Параметрические модели

- Если ξ возраст в момент смерти, то условная плотность ξ при условии дожития до возраста x называется интенсивностью смертности:

$$\mu(x) = \frac{f_{\xi}(x)}{1 - F_{\xi}(x)} = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx},$$

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu(y) dy\right)$$

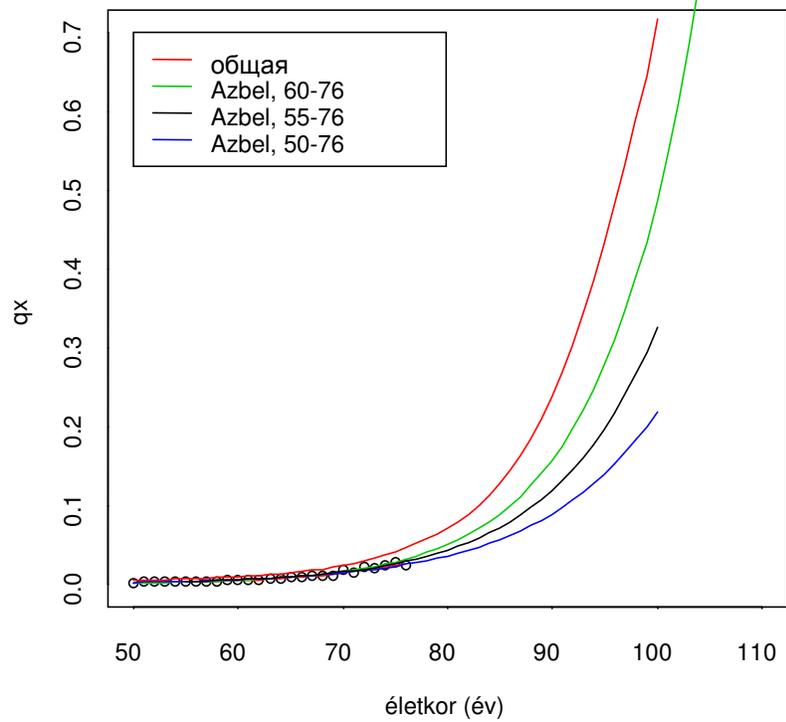
Параметрические модели

- Moivre (1729): $\mu(x) = \frac{1}{\omega - x}$
- Gompertz (1825): $\mu(x) = Bc^x$
- Makeham (1860): $\mu(x) = A + Bc^x$
- Azbel (1999): $q_x = Ab \exp[b(x - X)]$

Оценка параметров

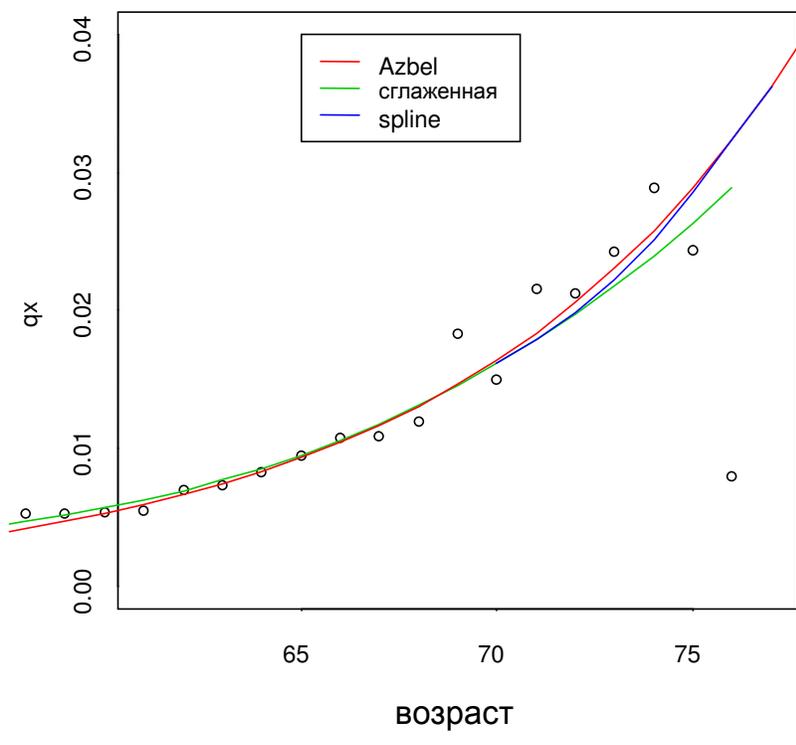
$$\sum \frac{l_x}{q_x} (q_x - q_{0,x})^2 \rightarrow \min$$

$$\sum \frac{l_x}{q_x} [(q_x - q_{0,x})^2 + (e_x - e_{0,x})^2] \rightarrow \min$$



07.12.2006

29



07.12.2006

30

От чего зависит смертность?

- пол
- раса
- место проживания
- род занятий
- доход
- застрахован ли
- вес
- курение
- ...

07.12.2006

31

Пол

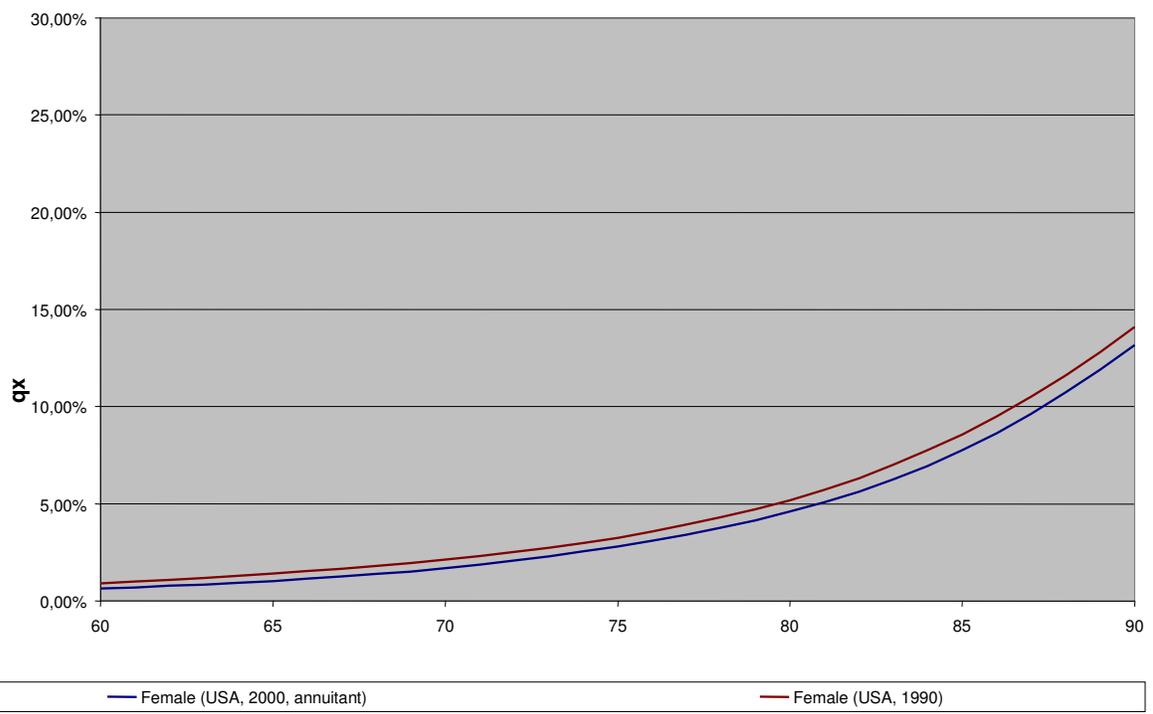
Life Expectancy at Birth (2000-2001)

| Country | Males | Females |
|----------------|-------|---------|
| Russia | 59,1 | 72,3 |
| Ukraine | 62,3 | 73,6 |
| Romania | 67,7 | 75,0 |
| Hungary | 68,3 | 76,8 |
| Bulgaria | 68,6 | 75,4 |
| Slovakia | 69,7 | 77,7 |
| Poland | 70,3 | 78,5 |
| Czech Republic | 72,1 | 78,7 |
| Portugal | 72,6 | 79,7 |
| France | 75,2 | 82,8 |
| Germany | 75,2 | 81,3 |
| Spain | 75,2 | 82,4 |
| United Kingdom | 75,7 | 80,5 |
| Italy | 76,2 | 82,6 |
| Switzerland | 77,0 | 82,8 |
| Sweden | 77,5 | 82,3 |

Аннуитанты

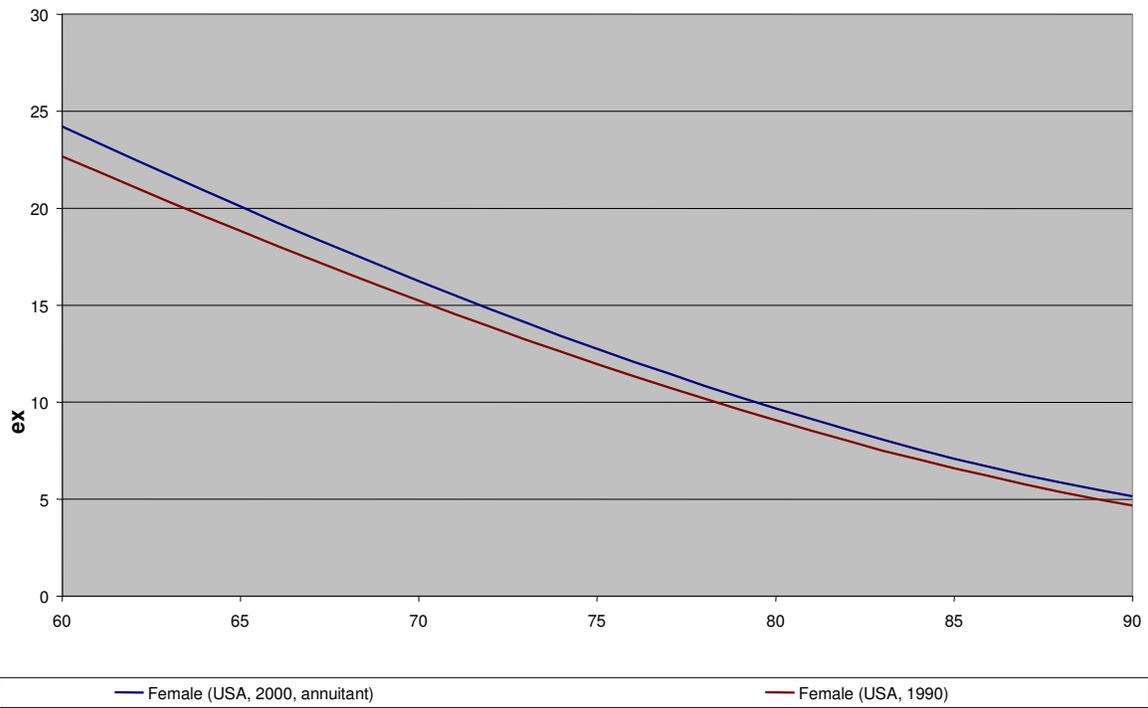
07.12.2006

33



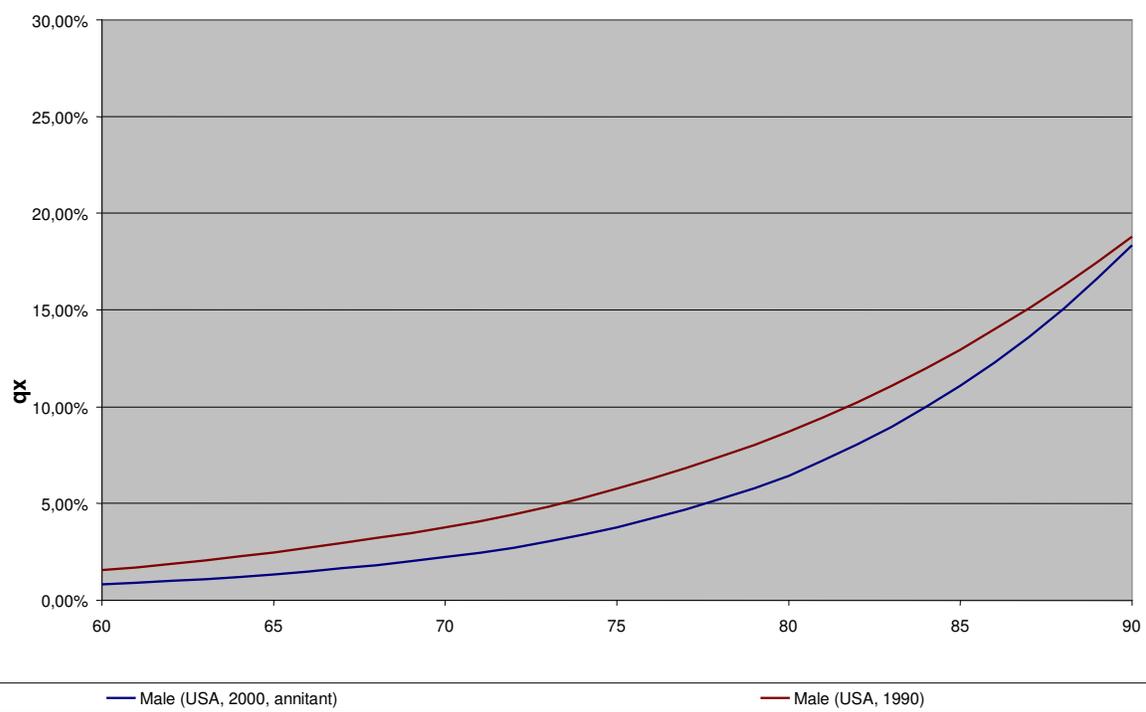
07.12.2006

34



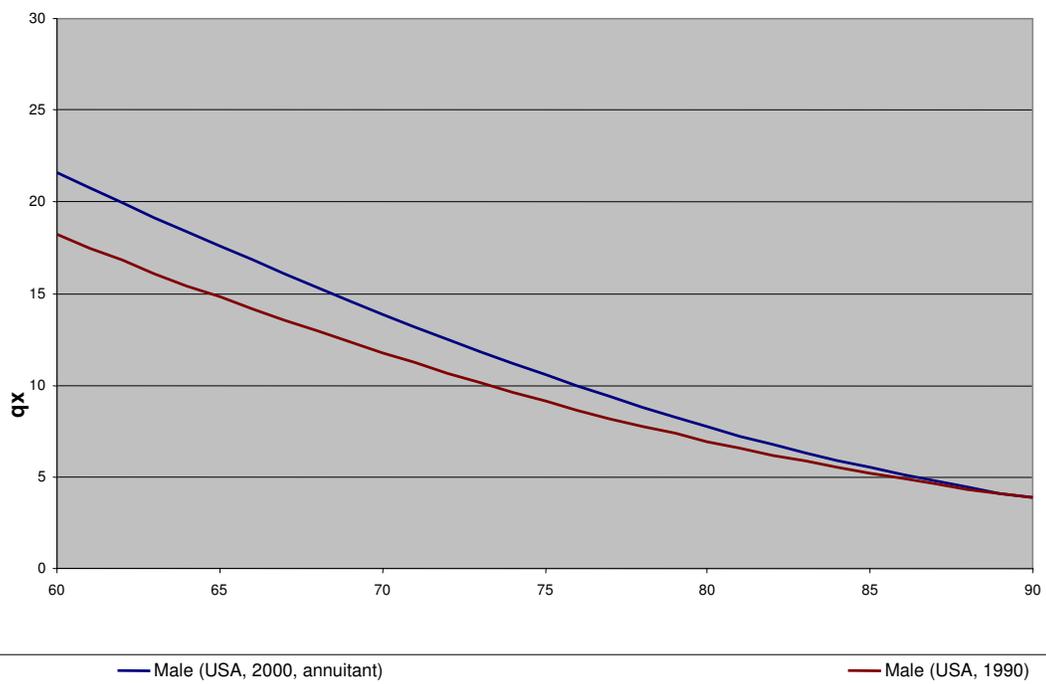
07.12.2006

35



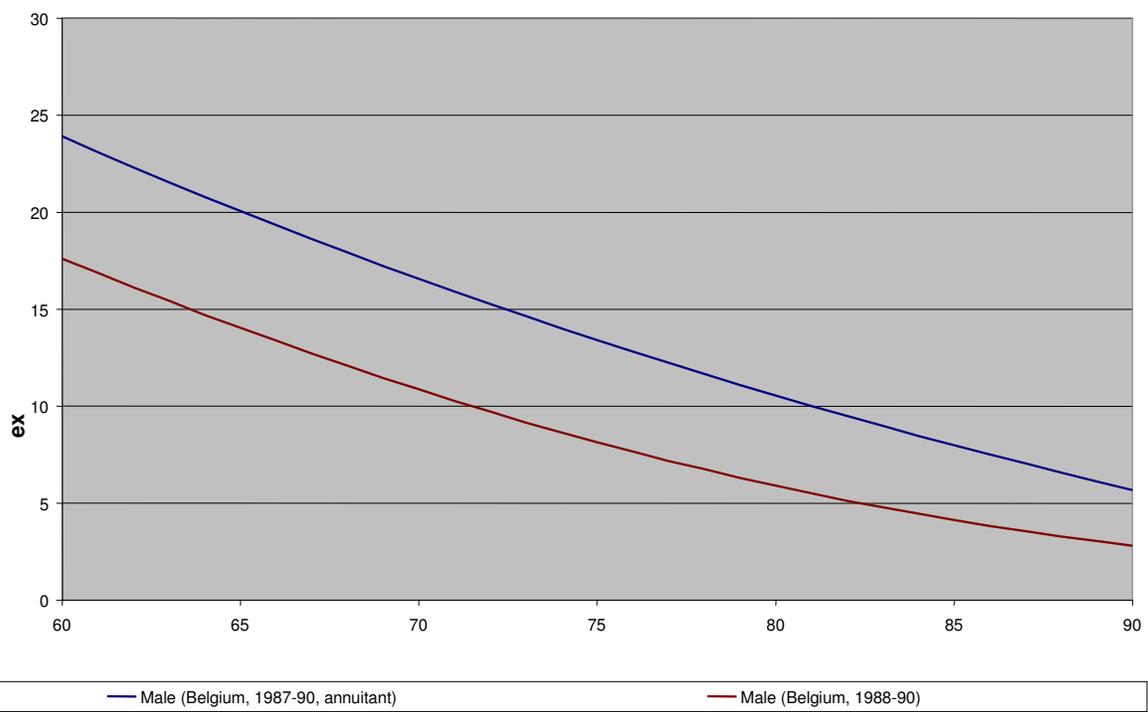
07.12.2006

36



07.12.2006

37

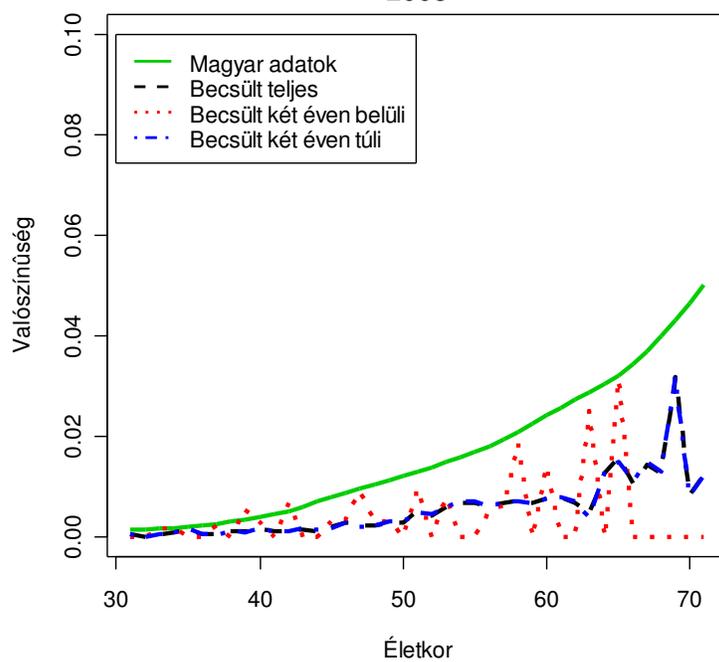


07.12.2006

38

Пример оценки для одной венгерской страховой компании,
зеленая линия: данные общенациональной таблицы

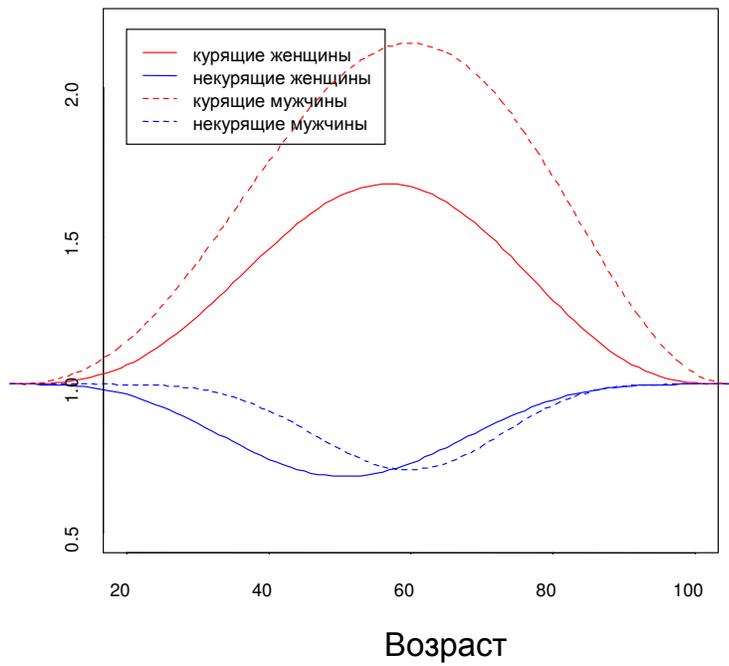
Halálozási valószínűségek
férfiak
2003



07.12.2006

39

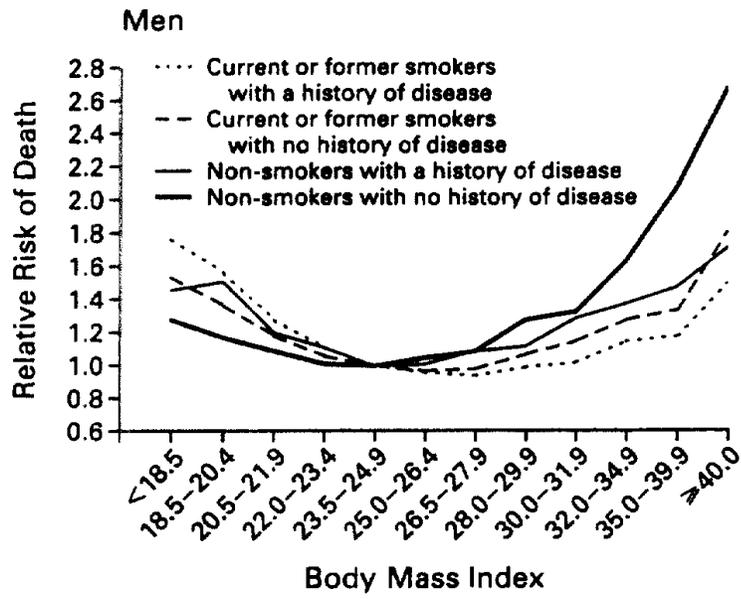
Курение



07.12.2006
эффект курения для имеющих страхование /по [2]/

40

Bec



07.12.2006 30.000 кг веса / [11] /

Выявление эффектов

- Как найти те факторы, которые влияют на смертность?
- Предполагаем, что наша база данных содержит все необходимые сведения.
- Первый шаг: считаем SMR для разных групп

$$SMR = \frac{\sum_x S_x^{(1)}}{\sum_x T_x^{(1)} q_x}$$

$S_x^{(1)}$: число людей в группе умерших в возрасте x
 $T_x^{(1)}$: продолжительность наблюдения людей
возраста x в группе
 q_x : оценка вероятности смерти по всем
наблюдениям

Сравнение смертности двух групп

$$\chi^2(1) = \sum_x \frac{(T_x^{(1)}q_x^{(1)} - T_x^{(1)}q_x^{(2)})^2}{T_x^{(1)}q_x^{(2)}(1 - q_x^{(2)})} = \sum_x \frac{(S_x^{(1)} - T_x^{(1)}q_x^{(2)})^2}{T_x^{(1)}q_x^{(2)}(1 - q_x^{(2)})}$$

$$\chi^2(2) = \sum_x \frac{(T_x^{(2)}q_x^{(1)} - T_x^{(2)}q_x^{(2)})^2}{T_x^{(2)}q_x^{(1)}(1 - q_x^{(1)})} = \sum_x \frac{(T_x^{(2)}q_x^{(1)} - S_x^{(2)})^2}{T_x^{(2)}q_x^{(1)}(1 - q_x^{(1)})}$$

- $S_x^{(i)}$: число людей в i . группе умерших в возрасте x
- $T_x^{(i)}$: продолжительность наблюдения людей возраста x в i . группе
- $q_x^{(i)}$: оценка вероятности смерти в i . группе
- распределения статистик приблизительно χ^2 , со степенью свободы количества возрастов, при одинаковой смертности двух групп

Сравнение смертности двух групп (2)

- модель: $q_x^1 = cq_x^2$
- или: $\frac{q_x^1}{1-q_x^1} = c \cdot \frac{q_x^2}{1-q_x^2}$ /см. [12]/
- оценка „с” определяется методом максимального правдоподобия

Выявление эффекта места /[13]/

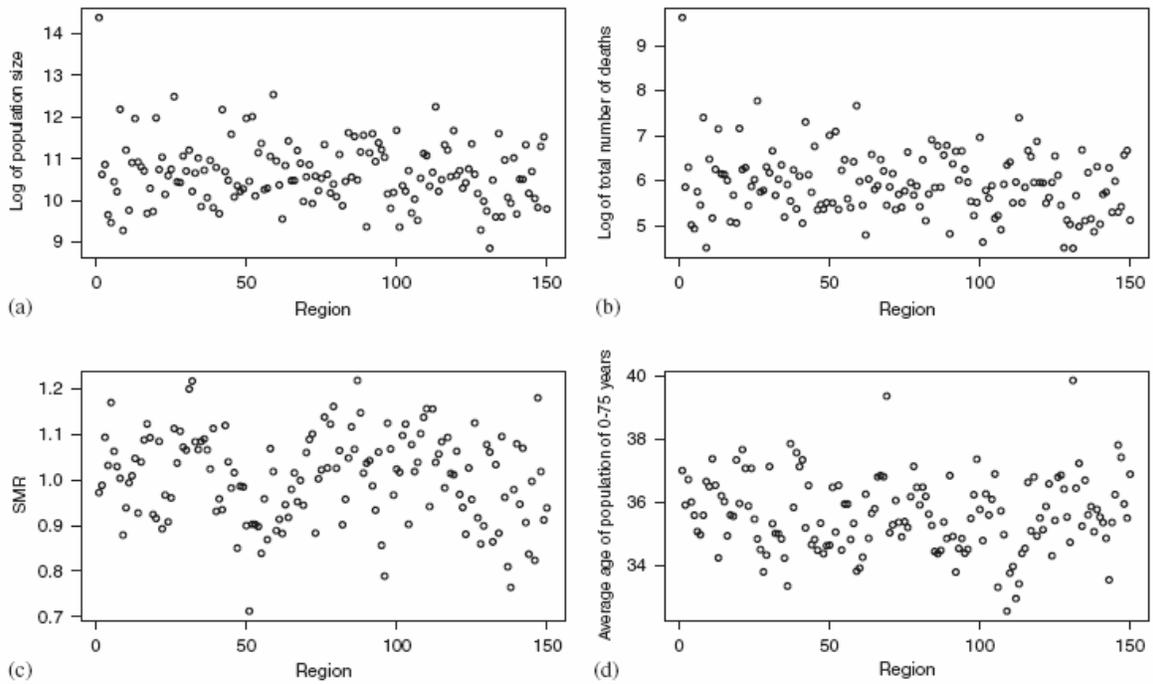


Fig. 1. Summary statistics for the 150 regions in Hungary: (a) log of the total population size, (b) log of the total number of deaths in the 0–75 age groups, (c) the standardized mortality ratio (see Section 3.1) and (d) the average age in the 0–75 age groups for each region.

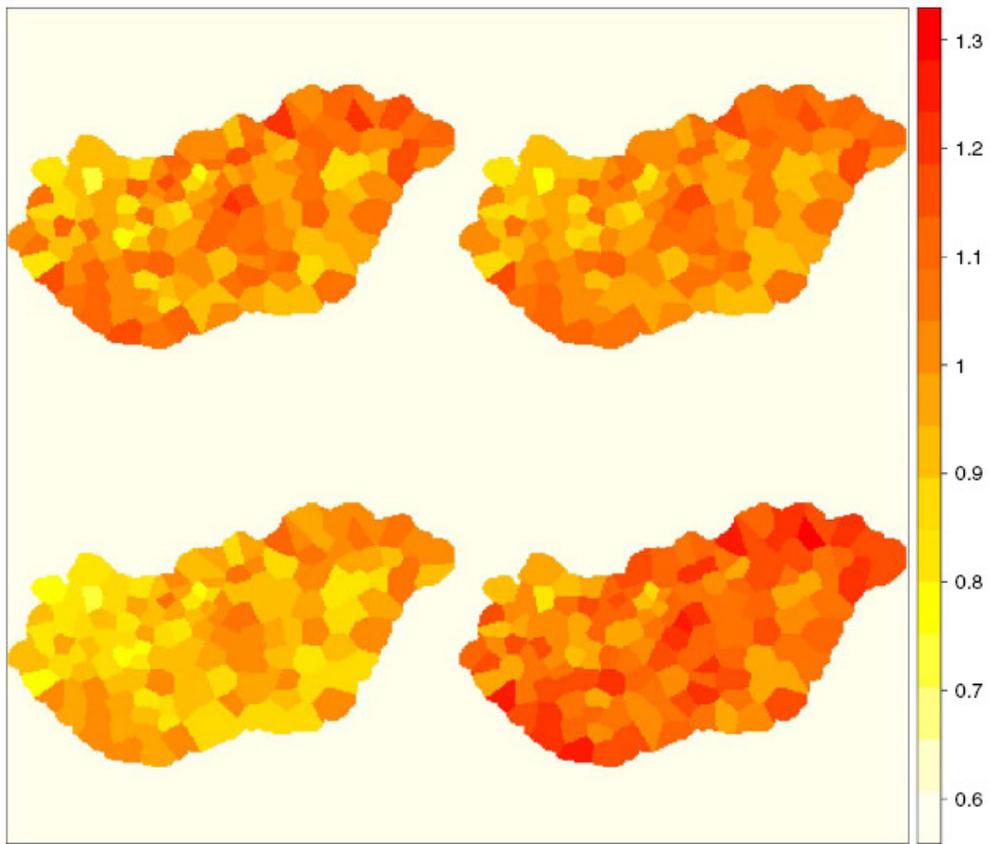


Fig. 7. The region effect ϕ_j , where darker colours indicate higher mortality effects. The top left plot shows the sample standardized mortality ratio (SMR). The top right shows the estimate of the posterior mean. The bottom plots show the 5% posterior quantile and 95% posterior quantile.

Изменения по времени

на слайдах 48-52 использованы материалы [14]

07.12.2006

47

Пример Бельгии

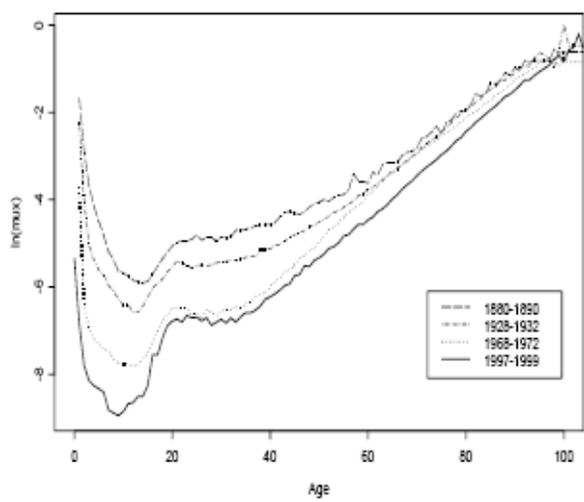
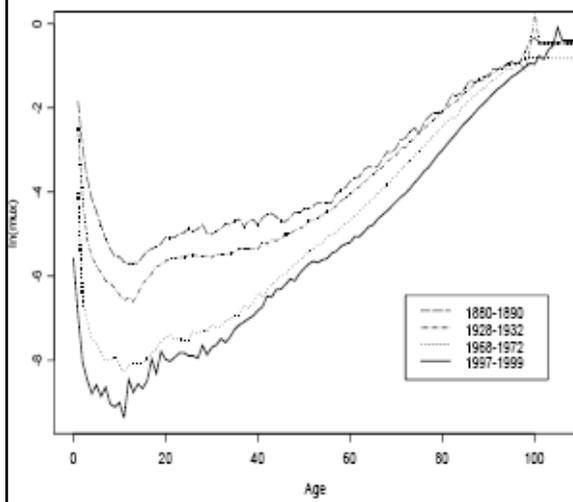
| Period | Men | Women |
|-----------|-------|-------|
| 1880-1890 | 51.35 | 57.08 |
| 1928-1932 | 65.74 | 69.44 |
| 1946-1949 | 69.12 | 74.17 |
| 1959-1963 | 71.45 | 77.30 |
| 1968-1972 | 71.40 | 78.00 |
| 1979-1982 | 73.33 | 80.30 |
| 1988-1990 | 75.51 | 82.28 |
| 1991-1993 | 76.24 | 82.94 |
| 1994-1996 | 77.25 | 83.98 |
| 1997-1999 | 77.83 | 84.29 |

| Period | Life Exp. <i>e</i> ₆₅ | |
|-----------|----------------------------------|-------|
| | Men | Women |
| 1880-1890 | 10.67 | 11.60 |
| 1928-1932 | 11.42 | 12.56 |
| 1946-1949 | 12.32 | 13.87 |
| 1959-1963 | 12.43 | 14.83 |
| 1968-1972 | 12.09 | 15.28 |
| 1979-1982 | 12.94 | 16.91 |
| 1988-1990 | 14.02 | 18.30 |
| 1991-1993 | 14.50 | 18.79 |
| 1994-1996 | 15.21 | 19.58 |
| 1997-1999 | 15.62 | 19.85 |

07.12.2006

48

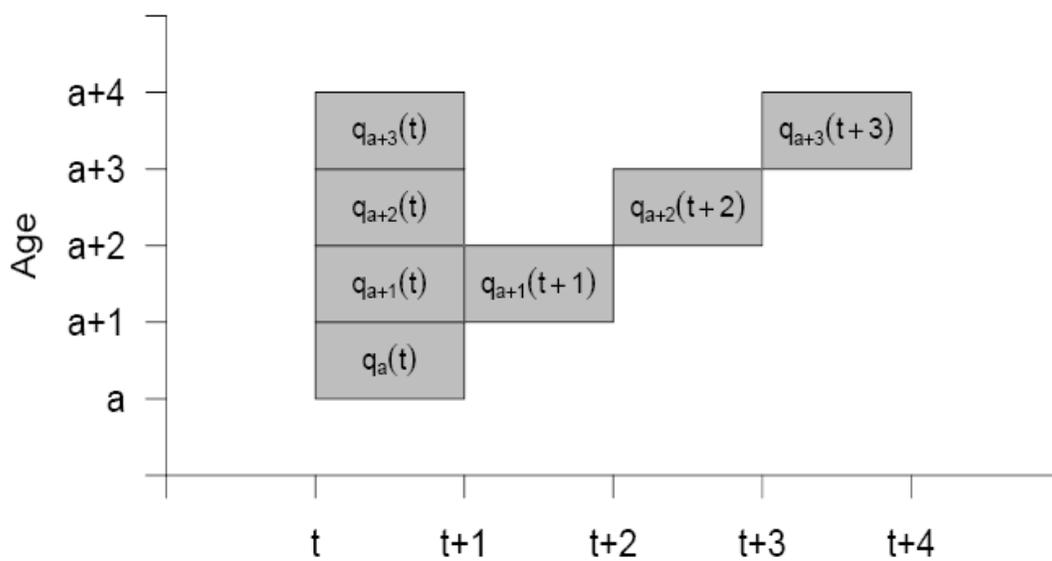
Graph of $x \mapsto \ln(\mu_x)$ for women (left) and men (right).



07.12.2006

49

При подсчете аннуитетов надо использовать q зависящие от времени



07.12.2006

50

Методы проекции

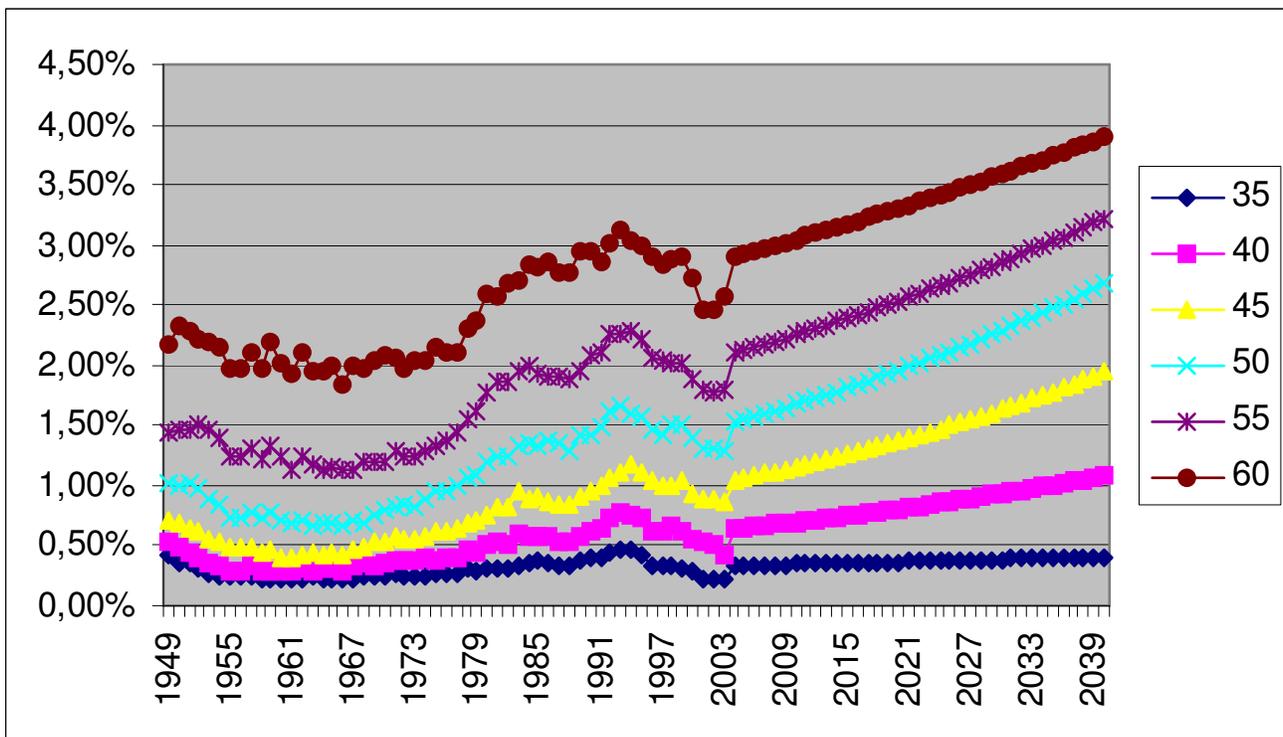
- Параметрические модели: Sithole, Haberman & Verrall (2000, [15]), Felipe, Guillén & Perez-Marin (2002, [16])
- Метод Lee-Carter [6]
- Пуассоновский лог-билинейный подход: Brouhns, Denuit & Vankeilegom (2005, [17])
- Обзорение:
http://www.gcactuaries.org/documents/summer_school_2006.zip

Метод Lee-Carter

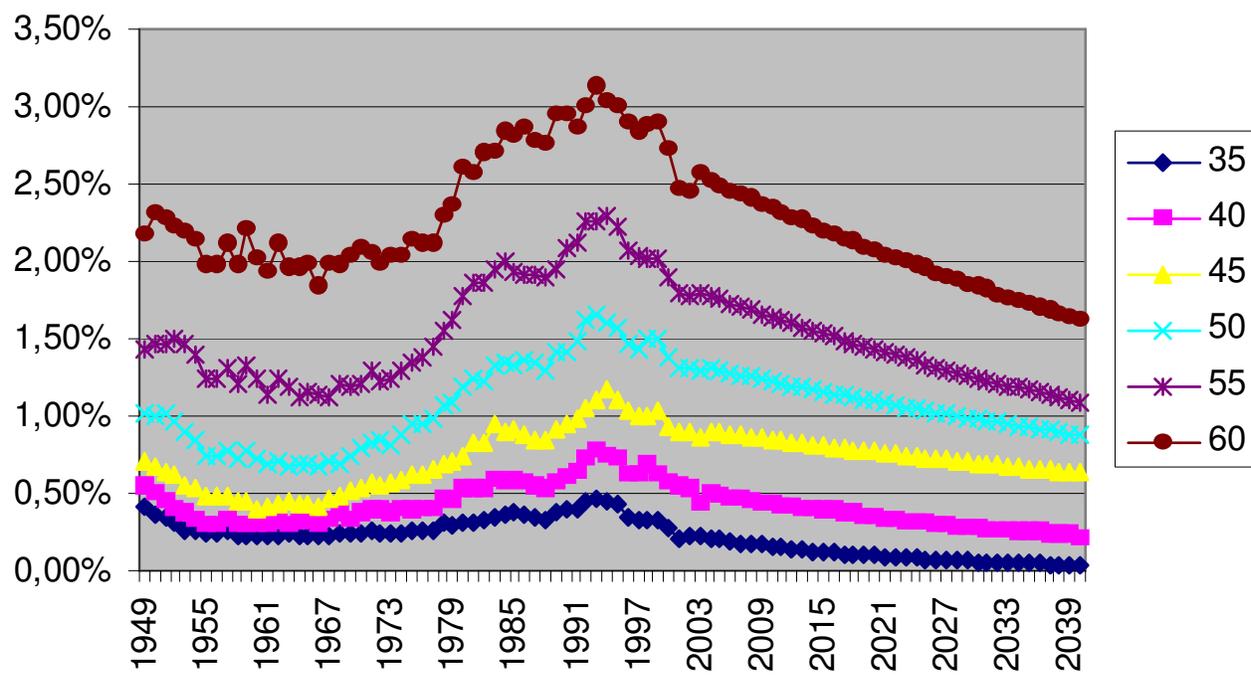
$$\ln \widehat{\mu}_x(t) = \ln \mu_x(t) + \epsilon_x(t), \quad \mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$$

κ_t процесс ARIMA

Предикция q с помощью Lee-Carter (Венгрия)



Предикция q с помощью Lee-Carter (Венгрия) /вариант/



07.12.2000

34

Поиск "похожей" таблицы

- Возможное применение:
 - Проверка сложных моделей при достаточном количестве наблюдений
 - При недостаточном количестве и качестве наблюдений позволяет оценивать таблицы смертности

Меры подобия

(1)-ая мера

$$QDEV = \sum_{i=K}^N \frac{T_i (q_{i1} - q_{i0})^2}{365 \cdot q_{i0}}$$

Собственные наблюдения: q_{i0}, T_i

Таблица которую ищем: q_{i1}

распределение меры асимптотически χ^2 , со степенью свободы $N - K + 1$

Статистика А/Е

$$A/E = 100 \cdot \frac{\sum_{i=K}^N l_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=K}^N l_{i0} q_{i0}}$$

Laspeyres

ERL, PV

$$ERL = 100 \cdot \frac{\sum_{i=K}^N l_{i1} - 0.5}{\sum_{i=K}^N l_{i0} - 0.5}$$

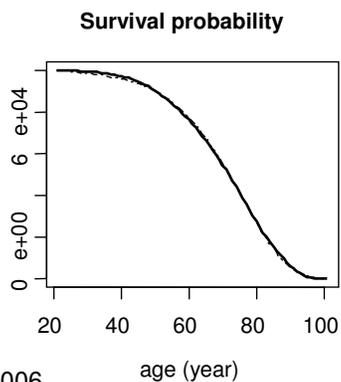
$$PV = 100 \cdot \frac{\sum_{i=K}^N d^{i-K} l_{i1}}{\sum_{i=K}^N d^{i-K} l_{i0}}$$

$$l_{k0} = l_{k1} = 1$$

Поиск таблицы

- Использование базы данных Американского Актуарного Общества (SOA)
<http://www.soa.org/ccm/content/areas-of-practice/special-interest-sections/computer-science/table-manager/>
- Несколько сотен таблиц. Поиск похожего типа (например общенациональная).

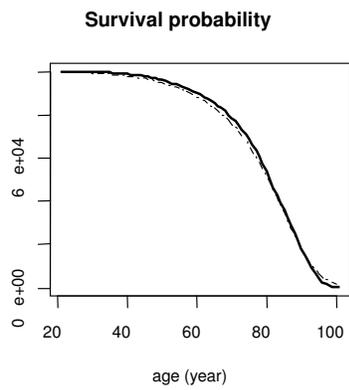
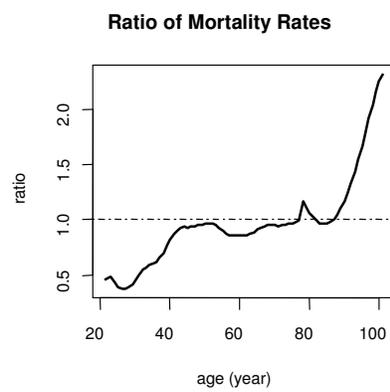
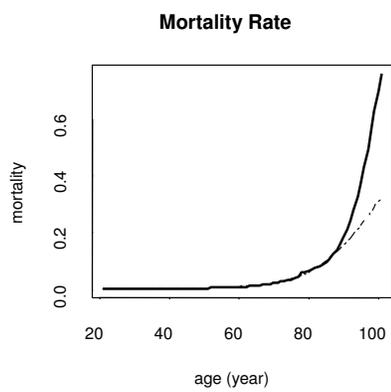
Пример: Венгрия (2000) и Америка (1950) /мужчины/



07.12.2006

60

Пример: Венгрия (2000) и Америка (1970) /женщины/



07.12.2006

61

Подсчет мер подобия

| QDEV | AE | ERL | PV1 | PV2 | PV3 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 185019.75 | 95.64 | 98.70 | 97.86 | 99.70 | 100.50 |

| QDEV | AE | ERL | PV1 | PV2 | PV3 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 754225.72 | 111.09 | 107.26 | 107.77 | 107.65 | 105.93 |

| Quantiles | 0.005 | 0.05 | 0.95 | 0.995 |
|------------------|-------|-------|--------|--------|
| QDEV | 20.95 | 26.81 | 55.58 | 66.08 |
| AE | 98.10 | 98.77 | 101.21 | 101.92 |
| ERL | 99.76 | 99.85 | 100.15 | 100.23 |
| PV 07.12.2006 | 99.80 | 99.87 | 100.12 | 100.19 |

62

Доверительные интервалы

- Подсчитываются не асимптотически, а 10000 раз симулируем смерти для соответствующей группы людей, предполагая, что вероятности смерти соответствуют данной таблице. Для каждого такого опыта оцениваем q и подсчитываем меры. По результатам 10000 опытов определяем интервалы.

Новый вид страхования

- Хотим например предсказать смертность пенсионеров которые получают аннуитет взамен квартир. Не располагаем никакими своими данными.
- Знаем, что в Америке существует схожий вид страхования (reverse mortgage). В начале 90-х годов предлагали использовать для такого вида страхования таблицу 1983 года для аннуитантов.
- Ищем похожую общенациональную таблицу в США. Таблицы 1980-90-х годов значительно лучше нынешних венгерских таблиц.
- Пробуем найти такие страны, где есть таблицы для аннуитантов. Самые похожие: Швейцария (1970) и Англия (1979-82). Расчеты производим используя таблицы смертности для аннуитантов этих стран.
- На следующей странице сравниваем ожидаемую продолжительность жизни для разных возрастов подсчитанных по этим таблицам с подсчитанной по венгерской общенациональной таблицей.

| | | | | |
|---------|---------|-----------|--------|------|
| мужчины | | | | |
| Возраст | Венгрия | Швейцария | Англия | USA |
| 60 | 16,1 | 20,5 | 17,2 | 22,6 |
| 65 | 13,1 | 16,6 | 13,7 | 18,6 |
| 70 | 10,5 | 13,1 | 10,6 | 15,0 |
| 75 | 8,1 | 10,0 | 8,1 | 11,7 |
| 80 | 6,0 | 7,4 | 6,1 | 9,0 |

07.12.2006

65

Отсутствие возрастных групп

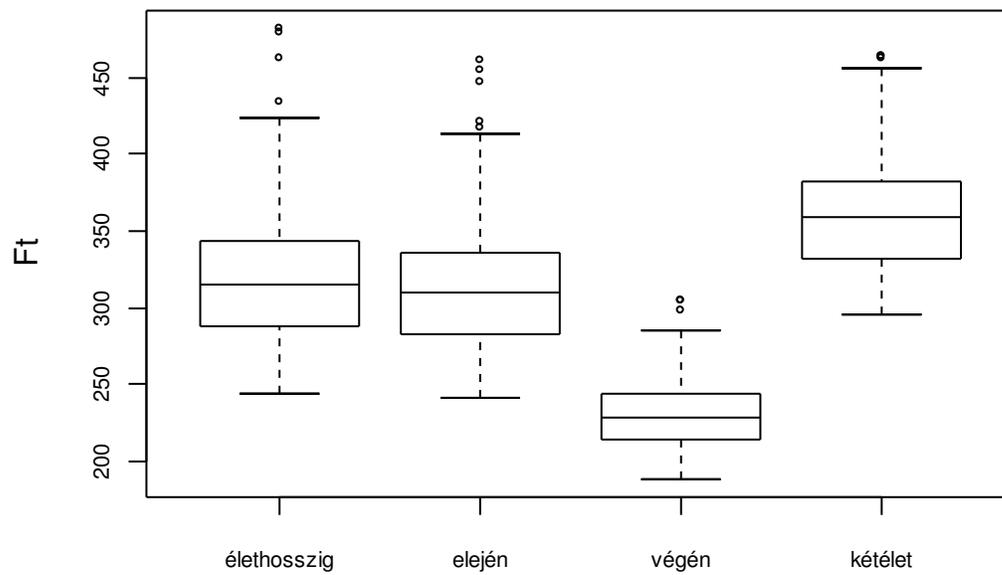
- Страховые компании и пенсионные фонды располагают данными о людях до возраста 65 лет.
- Ищем похожую таблицу в другой стране для клиентов страховых компаний.
- Рассматриваем развитие таблиц данного типа в последующие годы.
- Предполагаем, что клиенты нашей компании в будущем будут иметь схожую смертность.

Случайное проектирование времени смерти

- Развитие схожей таблицы рассматривается математическое ожидание развития нашей таблицы
- Налагается шум
- Шаги одной симуляции:
 - Одна реализация временного ряда шумов.
 - При таком развитии смертности жеребьевкой определяется время смерти (с точностью до месяца) для каждого нашего аннуитанта (или застрахованного).

Разброс аннуитетов

Járadékok 2011 -ben 62 éves nőkre



07.12.2006

68

Литература

- [1] The RP-2000 mortality tables. http://www.savitz.com/downloads/rp00_mortalitytables.pdf
- [2] Panjer, H.H - Tan, K.S. (1995) Graduation of Canadian Individual Insurance Mortality Experience: 1986-1992, <http://www.actuaries.ca/publications/proceedings/ag/vol26no2b/9588-Sub03.pdf>
- [3] Benjamin, B. - Pollard, J.H. (1993). The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics.
- [4] Azbel, M.Y. (1999). Empirical laws of survival and evolution. Proc. Natl. Acad. Sci., 15368-15373.
- [5] Benjamin, B. and Pollard, J. H. (1993). *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics*, Oxford: The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.
- [6] Carter, L. and Lee, R.D. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality: Differentials in Life Expectancy by Sex. *International Journal of Forecasting* 8(3): 393–412.
- [7] Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 115, pp. 513-585.
- [8] Makeham, W.M. (1860). On the law of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries* 13: 325–358.
- [9] McCarthy, D. G. and Mitchell, O. S. (2001). Estimating International Adverse Selection in Annuities. *PRC Working Paper, 2001*. Pension Research Council, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [10] Walsh, J. E. (1953). Some Probability Results for Mortality Rates Based on Insurance Data, *Journal of the Institute of Actuaries*, 79: 213-220.
- [11] Marchessault G. (2000). Cancer Study Estimates BMI and Mortality Risk, *Healthy Weight Journal*, May/June 2000, 39-41.
- [12] Cox D. R. and Oakes D. (1984). *Analysis of Survival Data*, Chapman and Hall, London, 1984, Ch.7.6

- [13] N. Miklós Arató, Ian L. Dryden, Charles C. Taylor (2006). Hierarchical Bayesian modelling of spatial age-dependent mortality, Computational Statistics and Data Analysis, Vol 51/2 pp 1347-1363.
- [14] MICHEL DENUIT (2006). MODELLING MORTALITY DYNAMICS FOR PENSIONS AND ANNUITY BUSINESS, Groupe Consultatif Actuariel Européen, Summer School 2006
- [15] Sithole, T.Z., Haberman, S., & Verrall, R.J. (2000). An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners' data. Insurance: Mathematics & Economics 27, 285-312.
- [16] Felipe, A., Guillén, M. & Perez-Marin, A.M. (2002). Recent mortality trends in the Spanish population. British Actuarial Journal 8, 757-786.
- [17] Brouhns, N., Denuit, M., & Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality projection. Scandinavian Actuarial Journal, 212-224.
- [18] Arató M., Bozsó, D., Elek P., Zempléni A. (2006). FORECASTING AND SIMULATING MORTALITY TABLES, http://www.math.elte.hu/~zempleni/mortality_1025.pdf